Orientaciones didácticas para 4º año de la EGB 2

Numeración y operaciones en Naturales

Para que los alumnos comprendan la representación de cantidades en el sistema de numeración decimal, en la escuela ha sido habitual presentar las nociones de unidad, decena y centena, en relación con la idea de agrupamiento: para obtener una decena, se agrupan las unidades de a 10; luego, las decenas se reúnen en grupos de 10 para obtener una centena, y así sucesivamente. Este modo de presentación, realizado durante los primeros años de la escolaridad, exige que los alumnos, además de comprender que en cada posición el valor de la cifra es diferente, entiendan que 10 veces 10 es 100, y 10 veces 100 es 1000, lo que conlleva la idea de multiplicación.

Otra manera de abordar la enseñanza de las características del sistema de numeración propone enfrentar a los alumnos con diversos problemas que les permitan explorar distintos tramos de la serie numérica, encontrando regularidades y estableciendo relaciones entre los números. Para establecer estas regularidades, es decir, las características que se repiten en un determinado tramo, los chicos tendrán que considerar el valor posicional de las cifras.

Este tipo de abordaje, en los primeros años de la escolaridad, considera las ideas y el modo de pensar las escrituras numéricas de los niños como anclaje para el aprendizaje. Por ejemplo, para interpretar, escribir o descomponer los números, los chicos se apoyan, por un lado, en los conocimientos numéricos ya alcanzados, pero también extraen información del modo como se nombran los números. Por ejemplo, *trescientos cuarenta y ocho* puede asociarse palabra por palabra a la escritura 300, 40 y 8, y por lo tanto, a la descomposición aditiva 300 + 40 + 8.

Entre 2do y 3er años/grados, cuando los alumnos comienzan a trabajar con las multiplicaciones, también podrán reconocer que *trescientos* es lo mismo que 3 veces 100 o que *cuatro mil* es 4 veces 1000.

Así, al estudiar las regularidades, consiguen arribar a conclusiones tales como: *cuatrocientos se combina con uno, dos, tres, … hasta nueve y allí comienzan los números del cuatrocientos diez, cuatrocientos once, cuatrocientos doce…;* o también: *cuatrocientos se puede combinar con diez, veinte…hasta noventa y ahí empiezan los del quinientos;* o bien: *cuando agregamos 100 a un número, cambia la cifra de la centena* y *cuando agregamos 1000 a un número, cambia la cifra de la unidad de mil.*

Para que los niños puedan descubrir regularidades, es necesario que les presentemos situaciones que involucren intervalos de la serie numérica suficientemente amplios, de modo que sea evidente cómo cambia la escritura al ir agregando 1, 10 o 100, etc. Cuando se avanza en la enseñanza según el orden "clásico", podría pensarse que algunos problemas como: *¿qué año será el que viene si ahora estamos en el 2006?* no pueden ser resueltos por los chicos si solo se ha trabajado con la numeración hasta 1000; sin embargo, ellos pueden arribar a una respuesta que dará cuenta de sus hipótesis acerca de las reglas que organizan el sistema de numeración.

En 2do y 3er años/grados, los alumnos trabajan el pasaje de la descomposición aditiva a la descomposición aditiva y multiplicativa de los números. Por ejemplo, pasar de pensar el 3472 como 3000 + 400 + 70 + 2, a hacerlo también como 3 x 1000 + 4 x 100 + 7 x 10 + 2.

Así, la resolución de situaciones que requieran que los alumnos comparen u ordenen cantidades y números, expliciten y analicen las regularidades de nuestro sistema de numeración, y compongan o descompongan aditiva y multiplicativamente los números, irá dando lugar poco a poco a que, además de la idea de valor posicional, puedan construir la noción de las sucesivas agrupaciones "de a 10". Este proceso suele demandar varios años de la escolaridad hasta que los niños logren una comprensión más acabada de las reglas del sistema.

A comienzos de 4º año se tiene que aumentar el tamaño de los números , para que los niños extiendan las regularidades ya descubiertas tanto en la serie oral como en la serie escrita. Es importante que los alumnos expliciten las relaciones de recursividad (cada 10 elementos de un orden se obtiene 1 de orden superior) y de equivalencia entre órdenes (10 unidades forman un decena, 10 decenas forman una centena o 100 unidades, etc.), las utilicen en las argumentaciones y establezcan vínculos entre descomposiciones aditivas y multiplicativas de un número (1234=1000 + 200 + 30 + 4 = 1 x 1000 + 2 x 100 + 3 x 10 + 4 x 1).

Plantear situaciones para comparar y ordenar cantidades y números

En particular, en relación con la posibilidad de comparar números u ordenarlos se tratará que los alumnos generalicen la conclusión de que el mayor es el que tiene más cifras y, si se trata de números con la misma cantidad de cifras, el más grande es el que tiene la cifra de mayor valor absoluto en el lugar que corresponde al mayor orden.

En 4º año serán de particular interés las comparaciones entre números de 5 o más cifras, como 40.800, 40.080 y 408.000 , que implican la consideración del valor posicional de las mismas cifras. En ese sentido, aunque los niños estén operando con números hasta la decena de mil, para hacer comparaciones que para ellos constituyen un desafío y no resulten evidentes, es conveniente recurrir a números más grandes.

Un tipo de situaciones en las que los chicos deben establecer comparaciones son aquellas donde hay que encuadrar números entre otros.

La recta numérica puede ser usada como soporte. El trabajo de encuadramiento de números naturales en la recta numérica constituye un antecedente valioso para el encuadramiento que se propondrá realizar más adelante cuando se estudien los números racionales.

Plantear situaciones para analizar regularidades

El trabajo con las regularidades de la serie puede continuar con el mismo recurso utilizado en 1er y 2o años/grados: los cuadros con 100 números. En este año/grado, suelen ubicarse los números de 1 en 1 para cualquier centena de la serie, por ejemplo, desde 600 a 699 o 1200 a 1299; o los números de 10 en 10 para un intervalo de mil números como el que va de 4000 a 5000; o también los números de 100 en 100, por ejemplo, desde 0 hasta 9900.

Esta propuesta de organización de los números resulta útil para analizar las regularidades, pues permite focalizar qué parte de la escritura numérica cambia cuando la cantidad representada aumenta de a 1: la cifra de las unidades cambia desde 0 hasta 9, mientras que la de las decenas se mantiene igual 10 números seguidos antes de cambiar al siguiente recorriendo, también de 0 a 9, etcétera.

En los casos en que varía de a 10, mientras se mueve en la misma fila, se modifica el lugar de la cifra de las decenas, y si se desplaza hacia el casillero de abajo se modifica el lugar de las centenas. Por último, si el cuadro está armado de 100 en 100, se modifica en las filas el lugar de las centenas y en las columnas, el lugar de la unidad de mil.

Plantear situaciones para componer y descomponer números

Para continuar en 3º año el trabajo de composición y descomposición de números abordado en 2o año/grado, y que los alumnos avancen en la comprensión del sistema de numeración, podemos plantear actividades como el canje de billetes, el cálculo de puntajes en juegos y la anticipación del resultado de operaciones realizadas con calculadora.

Otro recurso útil para que los chicos reflexionen sobre la posicionalidad de nuestro sistema de numeración es la calculadora.

Previo al trabajo con la calculadora, será necesario abordar actividades que les permitan a los chicos conocer su funcionamiento con preguntas como: *¿con qué tecla se enciende y con cuál se apaga?; ¿cuáles son las teclas de las diferentes operaciones?; ¿cómo se borra un número si uno se equivoca?*, etc.

Por ejemplo, si queremos que los alumnos piensen en la descomposición aditiva, podemos plantearles:

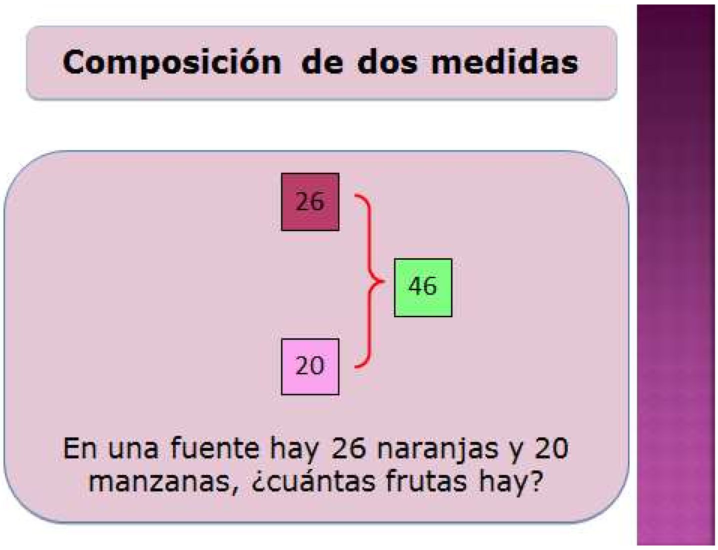
• ¿Cómo harías para obtener con la calculadora el número 245 usando únicamente las teclas 0 y 1 las veces que quieras y las teclas de las operaciones que necesites? No se puede sumar 1 + 1 + 1 … 245 veces.

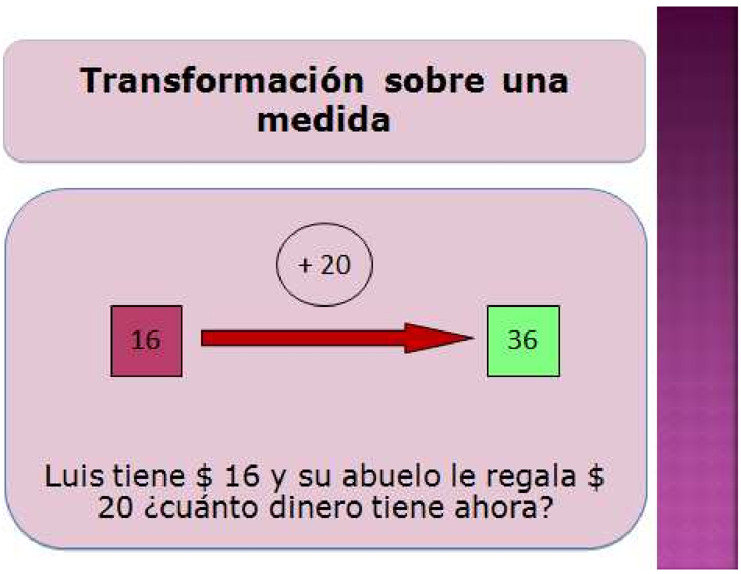
Los dos primeros contextos utilizados para plantear el trabajo con composiciones y descomposiciones (billetes y juegos de emboque) son extramatemáticos: en ellos los números se refieren a cantidades. En cambio, en los problemas planteados con calculadora, los números aparecen en un contexto intramatemático, es decir que ya no refieren a cantidades, sino que son tratados como tales. Es importante el trabajo en ambos tipos de contextos para construir el sentido de los números naturales.

Como en 4º año/grado trabajaremos con números más grandes, será necesario fabricar billetes de 1000, 5000, 10.000, etc., que no corresponden a nuestro sistema monetario pero que podrían funcionar con sentido en el contexto de algún juego de mesa, como "Buen viaje", "Monopoly", etc.

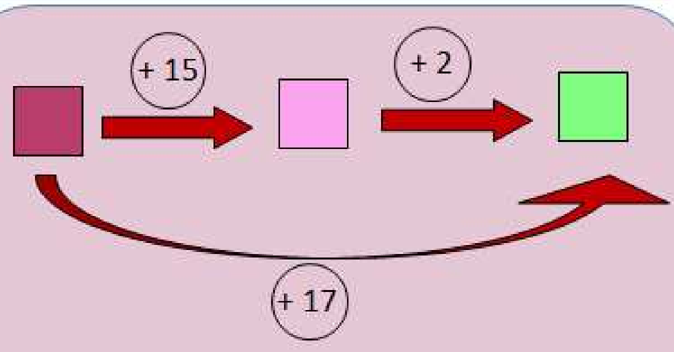
Otra posibilidad para que los alumnos discutan la vinculación entre la escritura sintética de un número y su descomposición multiplicativa, es plantearles una actividad con tarjetas con números y papeles(Ver Cuadernos para el Aula 4º año EGB 2)

Para operar al resolver problemas del campo aditivo



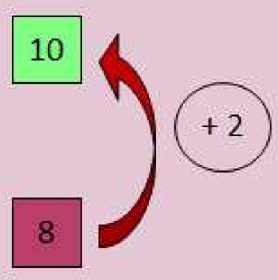


Composición de dos transformaciones



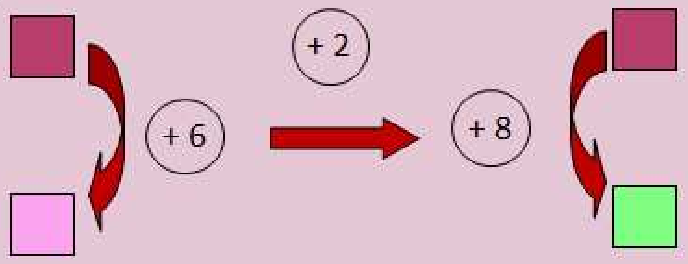
Ayer gané $ 15 y hoy $ 2, ¿cuánto dinero gané entre los dos días?

Relación entre dos medidas



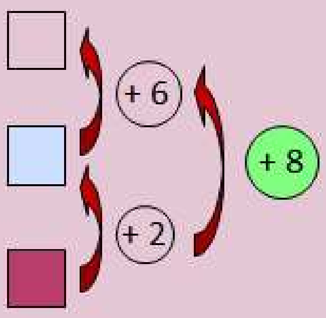
Ana tiene 8 años y su hermano tiene 2 años
más, ¿cuál es la edad del hermano de Ana?

Transformación sobre una relación



Luis tiene $ 6 más que su hermana, si su
abuelo le regala $ 2, ¿cuánto dinero más que su hermana tiene ahora?

Composición de dos relaciones



Si le llevo 2 años a mi prima y ella le lleva 6 años a su hermano, ¿cuántos años le llevo a mi primo?

LOS PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA PERTENECEN A UNA FAMILA Y NOS SE ESTUDIAN POR SEPARADO.

SE SUGIERE:

__En 1° año:__ se abordan problemas de composición de medidas, transformación positiva.

__En 2° año:__ se enseñan problemas abordados en 1° año y se agregan transformación negativa con la incógnita en los diferentes lugares.

__En 3° año:__ se agregan la composición de dos transformaciones positivas.

__En 4° año__ se aborda dos transformaciones (perder en ambas, ganar en ambas, perder y ganar en un juego) y las propuestas de trabajo con relaciones.

Para operar al resolver problemas con distintos procedimientos

Respecto de las cuatro operaciones básicas con números naturales (suma, resta, multiplicación y división), se deben considerar dos aspectos: por un lado, los distintos significados de aquellas, y por otro, los procesos que llevan a la construcción de los diferentes algoritmos propios de cada operación.

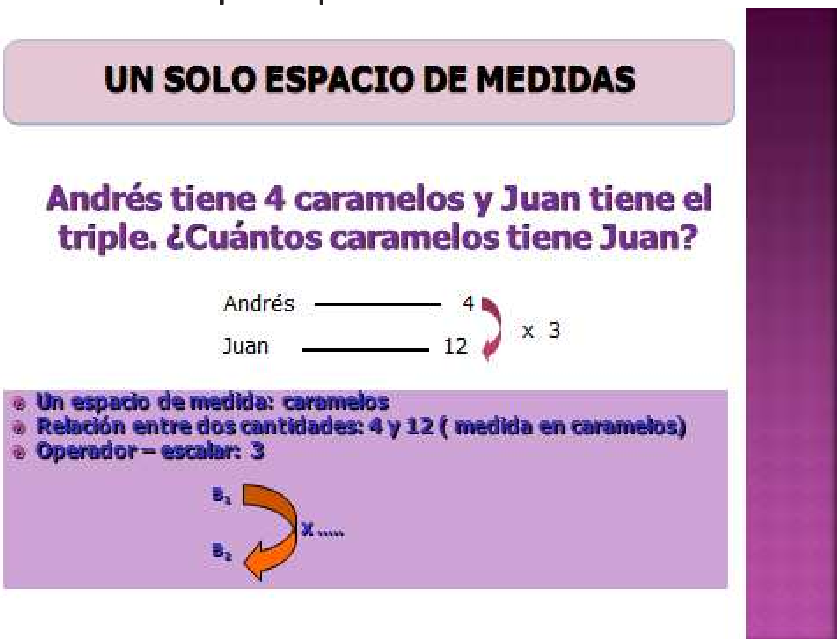
En relación con los significados, es importante señalar que una misma expresión numérica resuelve problemas aritméticos distintos. Por ejemplo, es diferente multiplicar 8 x 6 para resolver los problemas siguientes:

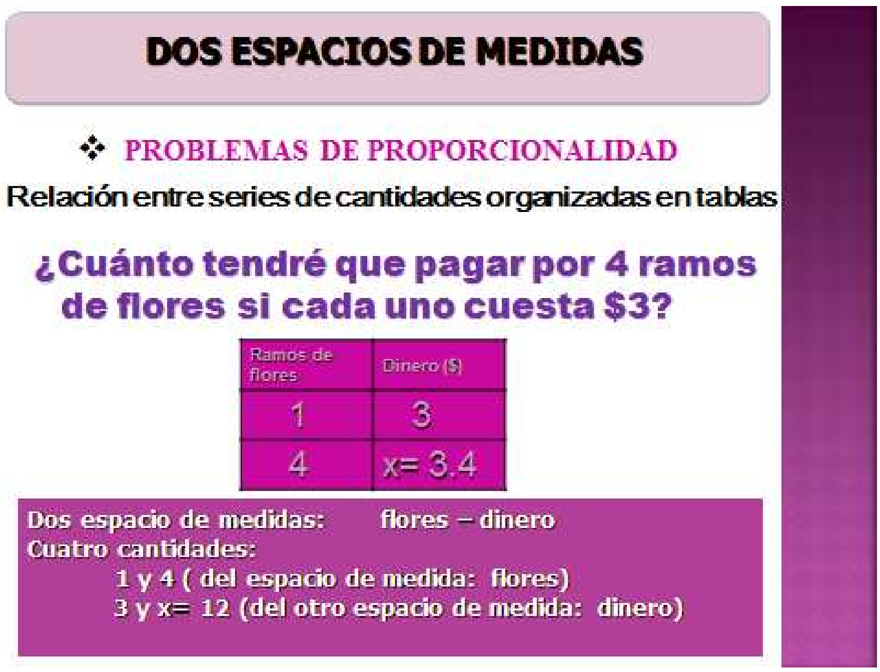
– Para el campamento de 3er año/grado, la escuela tiene 8 carpas y en cada una entran 6 personas. ¿Cuántas personas podrán dormir en las ocho carpas?
– En una fábrica, cada modelo de remera se hace en 6 colores y 8 talles. ¿Cuántas remeras diferentes hacen de cada modelo?

En estos dos casos, la misma multiplicación se utiliza con significados diferentes. 8 En el primero, hay dos cantidades que se relacionan de manera directamente proporcional, las carpas y las personas; en el segundo, hay tres tipos de cantidades, ya que se trata de combinar los elementos de dos tipos, colores y talles, para obtener elementos de un tercer tipo, las remeras diferentes.

Presentar múltiples situaciones que permitan reflexionar acerca de la diversidad de significados de cada operación facilitará la comprensión, por parte de los alumnos, de los alcances y límites de cada una de ellas.

Problemas del campo multiplicativo

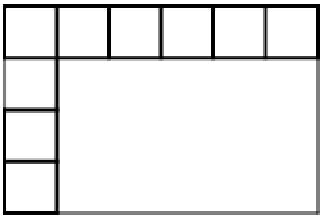




TRES ESPACIOS DE MEDIDAS

❖ PROBLEMAS DE ORGANIZACIONES RECTANGULARES

Las cantidades se presentan organizadas en filas y columnas



Este es el piso rectangular de un patio. ¿Cuántas baldosas se necesitan para cubrir todo el piso?

6 baldosas por fila x 4 baldosas por columna = 24 baldosas

Dos espacio de medidas se combinan para dar lugar a un tercer espacio

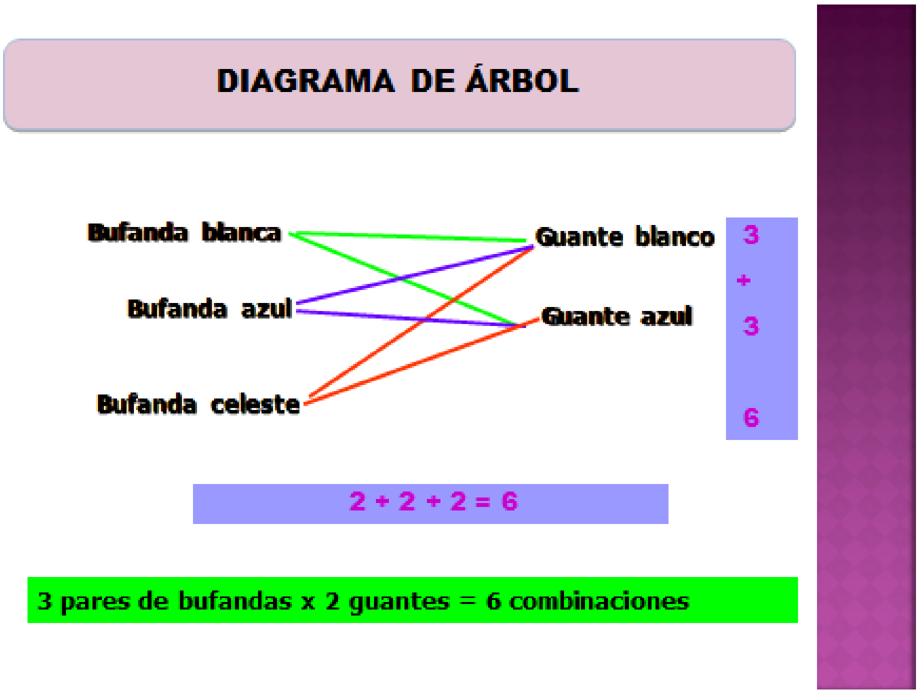
❖ PROBLEMAS DE COMBINATORIA

Determinar la cantidad que resulta de combinar elementos de distintas colecciones por medio de **diversas estrategias**

Si Natalia tiene una bufanda blanca, otra azul y otra celeste y un par de guantes blanco y otro par azul, ¿ de cuántas maneras diferentes puede combinarlos?

bufanda / guante	bufanda blanca	bufanda azul	bufanda Celeste
Guantes blanco	Bufanda blanca Guantes blanco	Bufanda azul Guantes blanco	Bufanda Celeste Guantes blanco
Guantes azul	Bufanda blanca Guantes azul	Bufanda azul Guantes azul	Bufanda Celeste Guantes azul

3 bufandas x 2 pares de guantes = 6 combinaciones



Plantear situaciones para multiplicar y dividir

También en el caso de la multiplicación y la división es conveniente proponer situaciones para que estas operaciones se constituyan, de a poco, en recursos disponibles para resolver situaciones con distintos significados. Este tipo de problemas se denominan "multiplicativos", aunque para resolverlos se pueda recurrir tanto a una multiplicación como a una división.

Recordemos que los problemas que conocemos como casos sencillos de proporcionalidad son aquellos que se pueden resolver con una multiplicación o una división, y donde hay dos tipos de cantidades relacionadas según ciertas propiedades que las caracterizan. Por ejemplo, para averiguar cuántos caramelos tengo si compré 4 paquetes con 10 caramelos en cada uno, se puede multiplicar 4 x 10. En este caso, hay que considerar dos tipos de cantidades, las de caramelos y las de paquetes. La misma relación se establece si se desea averiguar cuántos paquetes se pueden armar si hay que envasar 40 caramelos y entran 10 caramelos por paquete, problema que se puede resolver dividiendo 40 ./. 10. En los dos problemas tiene lugar la misma relación: la constante de proporcionalidad es "10 caramelos por paquete", y en ambos se cumple el hecho de que "para el doble de paquetes, corresponde el doble de caramelos".

Al resolver estos problemas, ya desde 2o año/grado los alumnos usan de forma intuitiva las propiedades de la proporcionalidad, aunque en este ciclo no se hará un trabajo específico para reconocerlas.

Para trabajar estas relaciones, podremos presentar, por ejemplo, problemas con un enunciado verbal y solicitar el completamiento de tablas.

Los problemas que remiten a organizaciones rectangulares, donde los elementos se presentan ordenados en filas o columnas, son también problemas de proporcionalidad, por ejemplo, si sabemos que en un edificio de 10 pisos hay 5 departamentos por piso y queremos saber cuántos timbres hay en el portero eléctrico. En este caso, la constante de proporcionalidad es el número de departamentos por piso.

En cuanto a los problemas de combinatoria, es decir, aquellos en los que hay que combinar elementos de diferentes colecciones también se abordan en 4º año.

Para la división, también es necesario incluir problemas que nos permitan abordar diferentes significados ya sea de reparto o de partición, incluidos los casos de organizaciones rectangulares de los elementos.

En los problemas en los que la división alude a un reparto equitativo, se conoce la cantidad total de elementos de la colección a repartir y la cantidad de partes, pero no cuántos elementos corresponden para cada una. Por ejemplo, en la lista de precios de cartucheras del problema de don Ramón, esto ocurre cuando hay que averiguar el precio de cada cartuchera, sabiendo que el precio de 2 cartucheras es de $ 10.

En los problemas que remiten a una partición, se conoce el valor de cada parte y se pregunta por la cantidad de partes en que puede partirse la colección.

Si en la lista de precios de cuadernos del problema de don Ramón se da como información que el precio de un cuaderno es $ 2 y se dice que se gastan $ 10, se puede preguntar cuántos cuadernos se han comprado.

Para calcular de diferentes formas

Uno de los requerimientos tradicionales de la formación primaria es que los alumnos que egresan de la escolaridad básica puedan realizar cálculos con soltura.

Sin embargo, las habilidades de cálculo que hoy se plantean en los documentos curriculares incluyen algunas no tenidas en cuenta anteriormente para ser enseñadas en la escuela y que han surgido de su estudio didáctico, ligado tanto a la diversidad de situaciones en las que se requiere su uso como a los instrumentos con los que se cuenta.

En este sentido, la enseñanza del cálculo deberá contemplar tanto la obtención de resultados exactos como aproximados, según las características de la situación y la posibilidad de decidir hacerlo mentalmente, por escrito o mediante la calculadora. En todos los casos, habrá que realizar un control de los resultados obtenidos que garantice el uso adecuado de las estrategias implementadas.

Por otra parte, un aprendizaje comprensivo de los cálculos implica que los alumnos puedan descomponer los números involucrados y combinarlos de distintas formas según la operación que estén realizando, de modo de poder atribuir un significado a cada paso. Luego, se podrá pasar al análisis y la discusión de los propios procedimientos considerando qué reglas están usando y si son o no propiedades de esas operaciones, es decir, reglas válidas en matemática. Los algoritmos convencionales o usuales tienen, entonces, un nuevo lugar en la enseñanza: son formas de cálculo con las que culmina un trabajo previo de producción y análisis de distintos procedimientos originales de los propios niños.

En este proceso de aprendizaje, el punto de apoyo es el cálculo mental. Sabemos que en un mismo grupo escolar los distintos alumnos tienen memorizados y disponibles diferentes conjuntos de cálculos mentales aditivos y multiplicativos para ser usados cuando los necesitan. Por ejemplo, en una clase de 3ro., unos conocen algunas sumas y restas; otros, también ciertos productos de las tablas, y unos pocos, cálculos como 25 x 4 o 50/. 2.

Sin embargo, todos tienen la capacidad de calcular mentalmente y es tarea de la escuela desarrollar esta habilidad. Para ello, es necesario destinar un tiempo importante del trabajo en el aula con el fin de identificar las diferentes estrategias personales de cálculo, explicitarlas para que otros puedan conocerlas y sistematizarlas para generalizar su uso y poder reutilizarlas en nuevas situaciones. La memorización de resultados que se comenzó a trabajar en 1er y 2do años/grados se debe retomar en 3ero con la intención ahora de que los alumnos amplíen los conjuntos de cálculos conocidos, tanto aditivos como multiplicativos. La idea es que en cada año del Primer Ciclo se vaya progresando en el dominio de ciertos cálculos; por ello, en cada año/grado, antes de comenzar a trabajar los conocimientos correspondientes al año en curso, es conveniente revisar qué cálculos de los años previos tienen efectivamente disponibles los chicos. La siguiente lista sintetiza los cálculos que podrían dominar los alumnos al finalizar cada año de este ciclo.

1er año/grado: Sumas de sumandos iguales de una cifra (1 + 1; 2 + 2; hasta 9 + 9). Sumas de decenas enteras iguales (10 + 10; 20 + 20; hasta 90 + 90). Sumas que dan 10 (1 + 9; 9 + 1; 2 + 8; 8 + 2; 3 + 7; 7 + 3, etc.). Sumas de números terminados en 0 que dan 100 (20 + 80; 80 + 20, etc.).

2o año/grado Sumas de sumandos distintos de una cifra (4 + 3, …, 8 + 6, etc.). Sumas de decenas (40 + 30; 70 + 60; etc.). Complementos a 100 (80 + … = 100; 40 + … = 100, etc.). Sumas y restas de múltiplos de 5 (35 + 15; 50 – 15, etc.). Dobles y mitades (el doble de 7; el doble de 20; la mitad de 80, etc.). Sumas de decenas enteras más unidades (10 + 8; 20 + 5, etc.). Sumas + 10 (78 + 10; 105 + 10; etc.) y restas – 10 (28 – 10; 35 – 10, etc.).

3er año/grado Sumas de centenas (400 + 300; 800+ 600, etc.). Complementos a 1000 (700 + … = 1000; 600 + … = 1000, etc.). Sumas y restas de los múltiplos de 50 (350 + 150; 500 – 150, etc.). Sumas de centenas enteras más decenas enteras más unidades (100 + 80 + 4; 200 + 50 + 7, etc.). Sumas + 100 (735 + 100 o 1050 + 100) y restas – 100 (280 – 100; 350 – 100, etc.).

Plantear situaciones para avanzar en el cálculo de sumas y restas

Como ya se ha planteado, los juegos reglados constituyen un recurso apropiado para trabajar con el cálculo mental. Recordemos que el juego en sí mismo no es una herramienta suficiente para garantizar una situación de aprendizaje; por ello, mientras que el objetivo de los alumnos en el juego reglado será ganar, para el docente, en cambio, será que el alumno aprenda un nuevo conocimiento. Es nuestra "intención" como docentes lo que diferencia el uso didáctico del juego de su uso social.

Es necesario que, luego de jugar, gestionemos con todos los alumnos momentos de análisis de las relaciones establecidas al jugar. Preguntas tales como: *¿qué estrategia utilizó cada uno? ¿Cuál les parece la forma más rápida? ¿Cuál permitió cometer menor cantidad de errores?,* etc., suelen ser las que sirven para orientar a los niños a reflexionar sobre los procedimientos utilizados. Asimismo, podemos escribir en el pizarrón los cálculos que se hicieron en cada grupo para considerar cuáles pudieron hacer más rápido y cuáles les dieron más "trabajo".

La calculadora es otro recurso para trabajar el cálculo mental de sumas y restas. Por ejemplo, podemos plantear problemas que permitan, además de considerar los cálculos, analizar las relaciones entre la suma y la resta como operaciones inversas, así como las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, que no se cumplen para la resta.

También podemos proponer actividades de investigación para discutir si siempre es posible cambiar el orden de los números en una cuenta sin que cambie el resultado, o cuál de los sumandos conviene poner primero para facilitar el cálculo.

Así, las propiedades comenzarán a ser utilizadas como reglas prácticas aceptadas por el grupo, para más adelante ser explicitadas como tales.

Respecto de los algoritmos usuales, estos deberán incluirse como una forma más de calcular, prestando siempre atención a la necesidad de que sean los alumnos quienes elijan el tipo de cálculo en función de los números involucrados.

Priorizar un trabajo sólo con "cuentas paradas" lleva muchas veces a un uso poco reflexivo y que da lugar a errores. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 191 \\ \cancel{2}\cancel{0}\cancel{0}5 \\ -\ 1800 \\ \hline 105 \end{array}$$

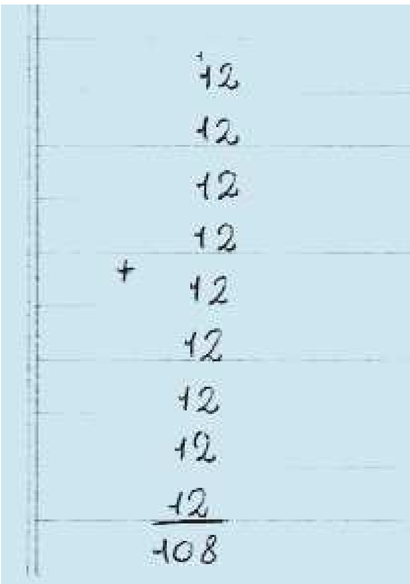
cuando es fácil advertir mentalmente que 1800 + 200 = 2000 y que la diferencia es 205.

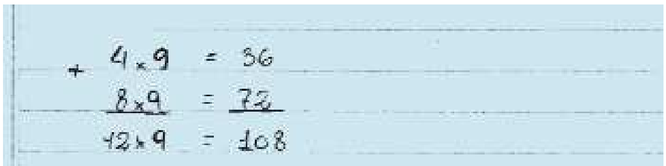
La práctica que se hace tradicionalmente sobre las cuentas puede enriquecerse si estas se seleccionan de modo que sea posible establecer relaciones entre ellas y se agregan preguntas que inviten a reflexionar tanto sobre los resultados como sobre los procedimientos.

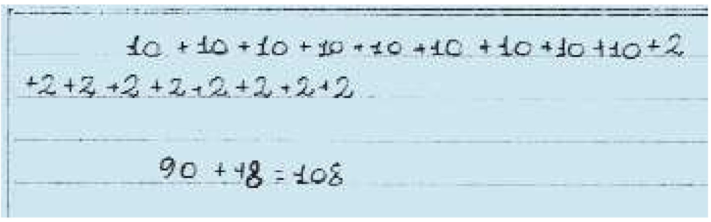
Plantear situaciones para avanzar desde los distintos procedimientos para multiplicar y dividir hacia los algoritmos usuales

Consideremos los que usan para un problema como el que sigue:

¿Cuántos botones hay que comprar para ponerlos en 9 delantales, sabiendo que llevan 2 en cada puño y 8 en el frente?





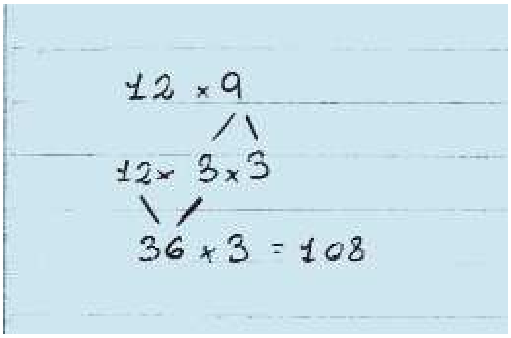


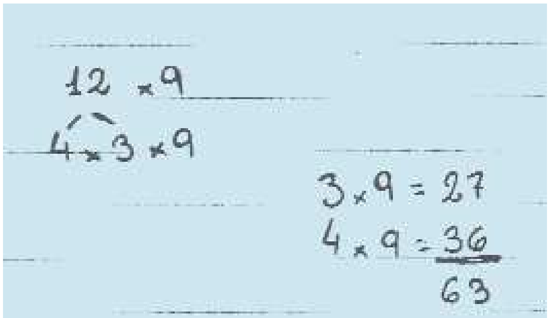
En los dos primeros procedimientos se plantean sumas sucesivas, pero se resuelven calculando de diferente modo, y en los dos últimos se plantean multiplicaciones.

En el tercero, la forma de calcular remite a pensar por separado en los botones de los puños (4 x 9) y los del frente (8 x 9); en cambio en el cuarto, piensan en 12 x 9 y luego descomponen el 12 en 10 y 2, apoyados en que es más fácil pensar en esas tablas. En ambos se utiliza de modo intuitivo la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

En la discusión con los chicos sobre los procedimientos utilizados convendrá incluir cuestiones como: *¿llegan o no al mismo resultado?; ¿qué diferencias hay entre ellos?; ¿cuáles son más económicos?; ¿por qué?* El uso de la propiedad distributiva se puede explicitar al reflexionar sobre las diferentes formas de resolver, a partir, por ejemplo, de la semejanza entre los últimos dos procedimientos: en ambos casos se multiplicó "por partes" y después se sumó.

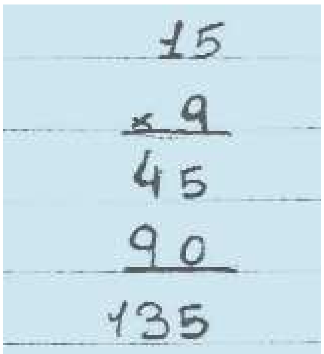
Una actividad interesante para plantear es el análisis de varios procedimientos diferentes, alguno de ellos con errores, con la consigna de "corregir" cálculos hechos por algunos alumnos, preguntando cómo y por qué fueron resueltos de este modo. Entre los procedimientos que se presentan también se podrían incluir algunos de los propuestos más arriba o aquellos que no hayan surgido en la actividad de producción. Otros procedimientos para presentar podrían ser los siguientes.

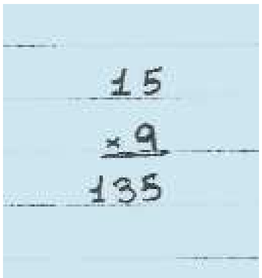




En ambos ejemplos se descompone un número en factores y se usa la propiedad asociativa, aunque en el segundo caso habrá que discutir con los chicos cómo se ha usado y por qué no se ha obtenido el mismo resultado que en el primer caso.

La consideración del algoritmo convencional para multiplicar por una cifra puede plantearse como parte del trabajo de análisis de procedimientos. Por ejemplo, se puede pedir a los alumnos que expliquen cómo creen que pensaron algunos compañeros para obtener el resultado de alguna cuenta ya conocida.





A partir de los procedimientos utilizados por los niños, el algoritmo convencional se presenta entonces como el procedimiento basado en la propiedad distributiva y la descomposición de los números atendiendo al valor posicional de sus cifras.

En este sentido, conocer los productos de diferentes números por 10, 20, …, 100, 200, contribuye con la comprensión y el dominio del algoritmo. Este trabajo debe ir acompañado del cálculo aproximado del resultado para que este funcione como un modo de control del procedimiento de cálculo exacto.

En cuanto al avance sobre formas de calcular divisiones, se pueden plantear situaciones que permitan a los alumnos descubrir otros procedimientos, tanto en casos con resto igual como distinto de 0.

Conviene que en un primer momento los niños resuelvan en pequeños grupos problemas como los planteados en "Plantear situaciones para multiplicar y dividir", del modo como ya se ha explicado. Un nuevo ejemplo es el siguiente:

– Marcelo compró 48 caramelos para repartir a 6 amigos en el día de su cumpleaños.
¿Cuántos caramelos colocará en cada bolsita? ¿Y si compra 57 caramelos?

Luego es posible proponerles que comparen los procedimientos que ellos usaron con los propuestos en la siguiente situación, para que focalicen la relación de la división con la multiplicación.

Para avanzar en el algoritmo de la división, será necesario considerar números más grandes de modo que no se pueda resolver la cuenta apelando únicamente a la tabla memorizada, ni recurriendo a la tabla pitagórica, como se propone en el primer punto del problema siguiente. Si los niños han trabajado antes con descomposiciones, es probable que esto los conduzca a descomponer los números de algún modo para poder resolver. Cuando se consideran contextos, vincular los números de la cuenta con las cantidades del enunciado, tal como se plantea en el último punto, permite evaluar la razonabilidad del resultado obtenido.

Plantear situaciones para explorar relaciones numéricas

En 3er año/grado, es necesario destinar un tiempo para realizar un trabajo específico que favorezca la construcción de un repertorio multiplicativo, es decir, un conjunto de cálculos memorizados y relacionados entre sí. Para ello, es posible apoyarse en los problemas multiplicativos que remiten a la noción de proporcionalidad y que permiten vincular distintas cantidades.

"Plantear situaciones para multiplicar y dividir".

En la enseñanza clásica, solo se apunta a la memorización de los productos, pero en este caso el objetivo es avanzar a partir del establecimiento de relaciones entre los resultados de una misma tabla y entre los de distintas tablas.

La idea es construir con los chicos la tabla denominada pitagórica, que contiene los productos de números hasta el 10. Para ello, es posible organizar una secuencia de actividades propiciando un espacio de análisis y reflexión en torno de las relaciones numéricas involucradas y de los procedimientos utilizados al completar las tablas.

Paralelamente, se sugiere que cada alumno tenga en su cuaderno un cuadro donde registrará los productos que va memorizando para, luego, independizarse de su uso.

Se presenta la tabla de las multiplicaciones como un cuadro de doble entrada, lo que permitirá ordenar los resultados de todas las multiplicaciones de los números hasta el 10. Para ello, debemos llevar a la clase un cuadro grande para trabajar de modo colectivo, por ejemplo en un papel afiche y, además, uno pequeño por alumno que cada uno pegará en su cuaderno.

Podemos explicar con un ejemplo cómo se ubican en la tabla dos factores y su producto: *el producto de 3 x 4 es 12, lo escribimos en…, y el producto 4 x 3, ¿dónde les parece que se puede escribir? ¿Por qué?*

Luego, podemos pedirles que *escriban los resultados que ya conocen.* No se les pedirá que completen toda la tabla, sino que escriban solo los productos que ya tienen memorizados. Por último, se puede pedir que avancen y *completen el resto de los casilleros,* usando en este caso otro color de lápiz o birome.

Cuando se ha trabajado significativamente con el repertorio de productos y se ha sistematizado el uso de la propiedad distributiva, el avance de las distintas formas que vienen utilizando los chicos para **multiplicar** hacia el algoritmo usual de multiplicación no debería representar más que el desafío de ordenar la escritura de los números en la cuenta de un modo diferente y más "económico".

Por ejemplo, consideremos los procedimientos utilizados por algunos niños para resolver el siguiente problema: *La comuna de Alvear tiene un pequeño cine con 8 filas de 13 asientos cada una. Se está realizando un proyecto para ampliar la sala de proyección agregando 10 filas más. ¿Cuántos asientos tendrá en total?*

¿Cómo podrían resolver los chicos de 4º año/grado esta situación? Veamos tres procedimientos diferentes.

Procedimiento 1

13 x 18 = 13 x 10 + 13 x 8

13 x 10 = 130	130
13 x 8 = 104	+ 104
	234

Procedimiento 2

13 x 18 = 13 x (8 + 10)

13 13 13 x 18 = 13 x 8 + 13 x 10 = 104+ 130 = 234

X 8 x 10

104 130

234

Procedimiento 3

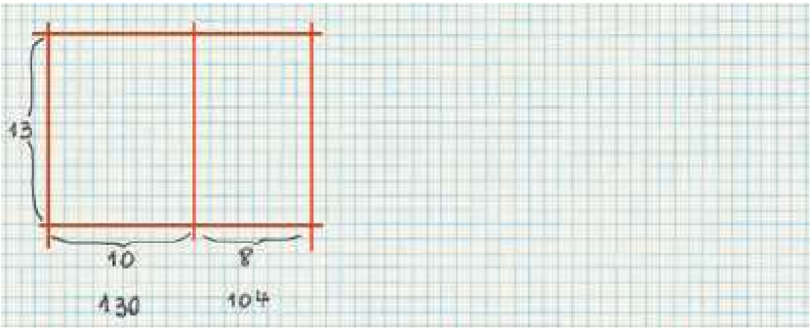


Tabla pitagórica

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Es necesario que, luego de realizada esta segunda consigna, se abra un espacio de reflexión y análisis en torno de lo realizado, en el que los alumnos puedan explicitar los distintos procedimientos utilizados. Por ejemplo, algunos explicarán que la llenaron verticalmente sumando sucesivas veces el número de la columna; otros contarán que, para completar los casilleros como 6 x 2 y 2 x 6, pensaron que algunos productos se repiten; otros dirán que escribieron primero las filas y las columnas de los números que les resultaban más familiares como 1, 2, 5 y/o 10. Una vez más, no se trata de elegir un procedimiento único sino de analizar los distintos procedimientos posibles.

Es necesario que, luego de realizada esta segunda consigna, se abra un espacio de reflexión y análisis en torno de lo realizado, en el que los alumnos puedan explicitar los distintos procedimientos utilizados. Por ejemplo, algunos explicarán que la llenaron verticalmente sumando sucesivas veces el número de la columna; otros contarán que, para completar los casilleros como 6 x 2 y 2 x 6, pensaron que algunos productos se repiten; otros dirán que escribieron primero las filas y las columnas de los números que les resultaban más familiares como 1, 2, 5 y/o 10. Una vez más, no se trata de elegir un procedimiento único sino de analizar los distintos procedimientos posibles.

Para favorecer el establecimiento de relaciones entre los números de una misma columna y entre los de las distintas columnas de la tabla, el docente elegirá el orden para presentar consignas como las siguientes, según cuáles hayan sido las argumentaciones que los chicos explicitaron en la actividad anterior.

• *Consideren las columnas del 5 y del 10. Algunos chicos dicen que estos productos son fáciles de recordar; ¿ustedes están de acuerdo? ¿Por qué?*

• *Si se compara cada número de la columna del 5 con cada uno de los de la columna del 10 para la misma fila, ¿qué relación tienen?*

Las razones que suelen dar los chicos para responder la primera pregunta se refieren a los números en los que terminan todos los de la columna: *todos terminan en 0 o en 5,* y *todos terminan en 0.*

En cuanto a la segunda pregunta, se trata de que establezcan la siguiente relación: los números de la "tabla del 10" son el doble de los de la "tabla del 5", o que los de la "tabla del 5" son la mitad de los de la del 10.

Luego se puede avanzar con la siguiente pregunta:

• *Si continuáramos la columna del 10 poniendo los casilleros para 11 x 10, 12 x 10, hasta el 19 x 10, ¿qué números escribirían como productos?, ¿podrían decir rápidamente cuánto da 35 x 10?, ¿por qué?*

Se trata de arribar con los chicos a una conclusión sobre qué sucede cuando multiplicamos por la unidad seguida de ceros.

En una actividad posterior a esta secuencia, apoyados en la conclusión aquí obtenida, se podrá discutir sobre la multiplicación por los números redondos en general, es decir, x 20, x 30, x 40, x 100, x 200, etcétera.

También es posible preguntar por relaciones entre otras columnas de la tabla, expresadas por multiplicaciones o mediante sumas.

• *¿Qué columnas se pueden duplicar para obtener otras?*

• *Si se compara cada número de la columna del 2 con cada uno de los de la columna del 6 para la misma fila, ¿qué relación tienen? ¿Y si se compara con la del 10?*

• *¿Cómo se pueden obtener los números de la columna del 8 partiendo de los de la columna del 2?*

• *¿Qué columnas es posible sumar para obtener otra?*

De mismo modo, se puede analizar en la tabla que hay distintos pares de factores para un mismo número, planteando la consigna:

• *Busquen los números que se repitan y, en cada caso, escriban los factores.*

Algunos de los números que se repiten aparecen dos veces y al escribir los factores puede concluirse que son los mismos en distinto orden, es decir, que se cumple la propiedad conmutativa. Por ejemplo, el 35, que es el producto que corresponde a 5 x 7 y a 7 x 5.

Otros productos, como por ejemplo el 12, el 24, el 36 o el 40, aparecen varias veces. Esto permitirá llegar a la conclusión de que algunos números admiten distintas descomposiciones multiplicativas en dos factores. Por ejemplo, para 12, aparecen en la tabla:

3 x 4   2 x 6
4 x 3   6 x 2

También es posible concluir que los números que están ubicados en la diagonal de la tabla pitagórica admiten una descomposición donde los dos factores son iguales.

El propósito de esta secuencia no es la memorización de la tabla pitagórica, sino favorecer el establecimiento de distintas relaciones entre los productos.

Es importante que alentemos a cada alumno a buscar el procedimiento que le resulte más fácil para recuperar rápidamente un producto que no recuerda, como, por ejemplo, 6 x 8, superando el procedimiento "tan difundido" de empezar a recitar la tabla desde el comienzo 6 x 1, 6 x 2 … hasta llegar a 6 x 8.

En 4º año/grado podemos retomar el trabajo que se propone en el *Cuaderno para el aula: Matemática 3* respecto de la tabla pitagórica que apunta no solo a la memorización de los productos, sino al establecimiento de relaciones entre ellos, como por ejemplo *los productos de la tabla del 6 son el doble de los productos de la tabla del 3*. Al hacerlo, además de retomar las conclusiones a las que se arribaron, podremos sistematizar las propiedades utilizadas.

En principio, es necesario que retomemos qué sucede cuando multiplicamos por la unidad seguida de ceros. Esto permitirá discutir sobre la **multiplicación por los números terminados en ceros** (o números redondos) en general, es decir x 20, x 30, x 40, x 100, x 200, etc., lo que permitirá a los chicos adquirir un repertorio que es fundamental para resolver multiplicaciones y divisiones por dos cifras, realizar cálculos aproximados tanto de multiplicar como de dividir y elaborar estrategias de cálculo diferentes de las utilizadas convencionalmente en función del tipo de números involucrados. En este sentido, es importante tener en cuenta que la elección de los factores puede promover, además del uso de productos por números redondos, el de distintas propiedades.

Por ejemplo, para discutir la multiplicación por números redondos apoyados en la multiplicación por la unidad seguida de ceros, podríamos proponer:

• Sabiendo que 16 x 10 = 160, ¿cómo resolverías, sin hacer la cuenta escrita, los siguientes cálculos?

a) 16 x 20 = b) 16 x 40 = c) 16 X 100 =

d) 16 x 50 = e) 16 x 80 =

En la explicitación de las resoluciones, probablemente los chicos, según los conocimientos que tengan disponibles, recurrirán a la descomposición de uno de los factores en otros (el factor 20 en 2 x 10 o el factor 40 en 4 x 10) y después aplicarán la propiedad asociativa para luego multiplicar el resultado por diez. Por ejemplo, para 16 x 20 = 16 x 2 x 10 = 32 x 10. En este ejemplo, el uso de la propiedad asociativa se apoya en el conocimiento del cálculo de dobles.

Otras situaciones en las que intervienen los conocimientos sobre productos con números redondos son aquellas en las que se discute la **división** de o por estos números. Por ejemplo:

• Si 60 : 10 = 6

a) ¿Cuánto es 60 : 30? ¿Y 60 : 20? ¿Por qué te parece que es así?

b) ¿Cuánto es 6000 : 30? ¿Y 600 : 20? ¿Por qué te parece que es así?

Este trabajo podremos retomarlo cuando nos aboquemos a la división por dos cifras mediante aproximaciones.

La multiplicación por los números redondos será la base para la realización de cálculos con estrategias diferentes a las convencionales. Por ejemplo, si se propone **multiplicar por 9 o por 11,** una estrategia válida para facilitarlo es la que se basa en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o de la resta.

Sabiendo que 43 x 10 = 430, resolvé los siguientes cálculos:

a) 43 x 11 = b) 43 x 9 =

Para resolver, los chicos podrían usar la propiedad distributiva de la suma o de la resta con respecto a la multiplicación, pensando así:

43 x (10 + 1) = 43 x 10 + 43 x 1 = 430 + 43 = 473

43 x (10 - 1) = 43 x 10 - 43 x 1 = 430 – 43 = 387

Así, los niños irán construyendo una nueva estrategia de cálculo que también podrá ser usada para resolver otros productos donde uno de los números termina en 1 o en 9, como 21 (20+1) o 19 (20 -1).

La multiplicación por los números redondos también será la base para la realización de **cálculos aproximados** que, además de permitir resolver ciertas situaciones, dan herramientas a los niños para controlar los resultados de las cuentas y para obtener resultados exactos en cualquier ocasión. Para esto podremos plantear:

• Para estimar el resultado de cada cálculo, completá los espacios en blanco.

31 x 42 30 x 40 = …… 410 : 11 …… : 10 = ……

390 : 9 390 : 10 = …… 119 x 310 120 x …… = ……

• Elegí el resultado sin hacer la cuenta y explicá cómo lo pensaste. Después resolvé para saber el valor exacto:

a) 25 x 8 160 250 200

b) 120 x 5 600 300 6000

En el intercambio de las explicaciones, en el segundo caso se podrán descartar algunos de los resultados afirmando por ejemplo, para el problema a): *250 no puede ser, porque resulta de multiplicar por 10, por lo tanto debe ser menor que 250. Y debe terminar en 0, ya que esta última cifra resulta de multiplicar 5 x 8. Por otro lado, si pensamos que 50 es el doble de 25, que 100 es el doble de 50 y que 200 es el doble de 100, y reconocemos que multiplicar por 8 es buscar el doble del doble del doble, resultará que el resultado es 200.*

Además, para que los alumnos establezcan relaciones entre los números involucrados en la operación y el resultado obtenido, luego de comentar con el grupo los resultados y detectar cómo los consiguieron de manera más fácil, podemos preguntar: *¿Cómo aumentan los factores? ¿Cómo aumenta el resultado?*

Así, fortaleceremos una actitud que más allá de hallar el resultado los lleve a "mirar la cuenta" y determinar si es posible ese resultado.

Cuando los alumnos disponen de variadas estrategias, es interesante que ante cada situación se discuta la conveniencia de realizar un procedimiento de cálculo u otro en función del tipo de números involucrados, las propiedades conocidas y los cálculos mentales disponibles. Por ejemplo:

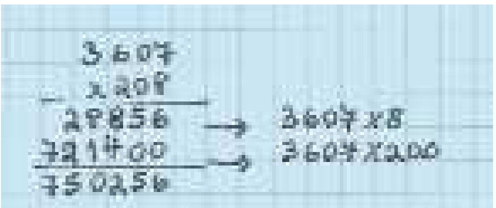
- *para calcular 250 x 8 es fácil descomponer en 250 x 4 x 2, si se sabe que 25 x 4 = 100, también es fácil pensar 250 x (10 - 2) y hacer 2500 – 500, y hacer un cálculo aproximado 250 x 10 = 2500*

- *para resolver 2480 : 20 es fácil resolver mentalmente, descomponiendo 2000 : 20 = 100; 400 : 20 =20 y 80 : 20 = 4 y el resultado se obtiene sumando 100 + 20 + 4.*
  También es fácil pensar 2400 : 20 = 120 si se sabe que 24 : 2 = 12 y luego 80 : 20 = 4.

Las cuentas de dividir constituyen uno de los contenidos que genera muchas dificultades en la vida escolar y esto no puede atribuirse en todos los casos a la falta de conocimientos previos de los niños. El procedimiento que se aprendía de forma mecánica se apoya, en su enseñanza tradicional, sobre la verbalización de las acciones que se van realizando (algunas más explícitas que otras) y que aluden a los repertorios de la multiplicación, la resta y la descomposición de los números según su valor posicional.

Si los niños han trabajado previamente con aproximaciones sucesivas de restas y han fortalecido suficientemente el repertorio de la multiplicación incluyendo productos por 10, 100, 20, 200, etc., como hemos planteado antes, podemos avanzar con cierta naturalidad hacia un algoritmo de aproximaciones sucesivas, acortando significativamente los procedimientos utilizados hasta el momento. En este sentido, proponemos mantener como expectativa la realización de un algoritmo por aproximaciones sucesivas de productos con resta incluida, cuyos pasos y resultados pueden ser controlados por los niños, y no forzar el uso del algoritmo tradicional, que oculta muchas relaciones difíciles de explicitar y controlar por parte de los niños y por ello se vuelven fácilmente olvidables.

Cabe destacar aquí que si los chicos piensan las cuentas usando la propiedad distributiva disminuyen los errores cuando surgen cálculos que incluyen números con ceros entre sus cifras. Por ejemplo, para hacer 3607 x 208, pueden pensarlo como la suma de dos multiplicaciones 3607 x 8 y 3607 x 200, y escribir entonces:



El desarrollo de este procedimiento está sostenido, no sólo en la comprensión del proceso de reparto y restas reiteradas, sino también en el cálculo mental (tablas, multiplicaciones por la unidad seguida de ceros) sin cuyo dominio la estrategia no se puede sostener.

Asimismo, también es importante avanzar en el uso reflexivo de la calculadora para operar con números grandes, fortaleciendo la evaluación de la razonabilidad del resultado con el cálculo aproximado.

En 4º año/grado es conveniente que retomemos el trabajo de división de 3er año/grado, con situaciones de reparto, aumentando el número de elementos, para que los alumnos conserven el sentido de lo que hacen.

El algoritmo de la división que ya se aprendió en 3º grado se sigue profundizando .Solo después de un intenso trabajo con cuentas, que muy probablemente sean largas, es decir que en el cociente aparezcan reiteradamente cienes y dieces, nuestras intervenciones podrán apuntar al acortamiento de dicho algoritmo.