Índice

Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo

Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo

Palabras previas

Quienes enseñamos necesitamos revisar permanentemente qué hacemos y para qué lo realizamos. Sabemos, por una parte, que cada una de nuestras experiencias tiene características singulares e irrepetibles; así, cada año, un nuevo grupo de alumnos nos plantea un desafío renovado. Por otra parte, los conocimientos que enseñamos y nuestras estrategias de enseñanza también se modifican; y son, además, cajas de resonancia de múltiples transformaciones y necesidades que tienen lugar en la sociedad, en sentido amplio y, en particular, en los campos de saber.

Por eso, en estas páginas volvemos sobre ciertos aspectos de la tarea de enseñar que seguramente no son nuevos, pero sí centrales para promover mejores aprendizajes.

Preguntarse qué significa aprender Matemática; qué se entiende por enseñar mediante la resolución de problemas y qué se concibe como problema; analizar cómo influye la gestión de la clase en el tipo de aprendizaje que logren los alumnos; estar actualizado respecto de algunos avances de las investigaciones didácticas; todo ello puede ayudarnos a realizar una relectura de las prácticas habituales, encontrar nuevos sentidos para lo que hacemos y reinventar así nuestras propuestas.

Pensar la actividad matemática en la ciencia y en la escuela

El conocimiento matemático, como ocurre con otros conocimientos y con las producciones culturales en general, ha ido generándose y transformándose en diferentes momentos históricos, en diálogo permanente con problemas que tienen lugar en los distintos entornos sociales y culturales.

Cuando se quiere estudiar una determinada situación o interactuar con ella desde la Matemática, se formulan preguntas que pueden referirse tanto al mundo natural y social como a la misma Matemática. Para responderlas, se utilizan **modelos matemáticos** conocidos o se elaboran conjeturas y se producen nuevos modelos. En todos, las conclusiones que se elaboran se interpretan para determinar si responden o no a las preguntas planteadas inicialmente.

También forma parte de este proceso mejorar la eficacia de los modelos que se crean y de las formas de comunicar los descubrimientos, así como establecer relaciones entre lo nuevo y lo que ya se conoce.

El proceso de construcción y las conclusiones resultantes tienen rasgos específicos: un modo particular de pensar y proceder, y conocimientos con características particulares. Estos conocimientos permiten **anticipar** el resultado de algunas acciones sin realizarlas efectivamente. Por ejemplo, para determinar *de cuántas formas distintas puedo combinar 5 entradas, 12 platos centrales y 10 postres diferentes en un restaurante,* es posible calcular el producto 5 x 12 x 10 sin necesidad de armar las diferentes posibilidades y contarlas. Por otra parte, los resultados se consideran **necesariamente verdaderos** si, para obtenerlos, se han respetado reglas matemáticas. Por ejemplo, para la multiplicación planteada en el problema anterior, se puede justificar que 5 x 12 x 10 = 5 x 2 x 6 x 10 = (5 x 2) x x 10 x 6 = 10 x 10 x 6, aplicando propiedades de la multiplicación. En el mismo sentido, al trabajar con figuras en geometría es posible afirmar, aun sin hacer ningún dibujo, que si se construye un cuadrilátero cuyas diagonales son distintas, este no puede ser un cuadrado pues, si lo fuera, tendría sus diagonales iguales.

A la vez, la obtención de nuevos resultados conlleva la necesidad de crear un lenguaje para comunicarlos. Los números, las figuras y las relaciones tienen **representaciones** cuyo uso se conviene entre los matemáticos.

De esta manera, la actividad matemática en la ciencia está muy fuertemente ligada a la resolución de problemas y a un modo particular de razonar y comunicar los resultados.

Esta forma de trabajar en Matemática debería ser también la que caracterice la actividad en el aula desde los inicios de la escolaridad. Se trata de que los alumnos **entren en el juego matemático,** es decir, que se ocupen de producir conocimientos nuevos (para ellos) frente a los problemas que se les planteen, y que debatan para validarlos. Luego, con la intervención del maestro, los reconocerán como conocimientos que forman parte de la Matemática. Así, en la escuela, los niños deberían ser introducidos en la cultura matemática, es decir, en las formas de trabajar “matemáticamente”.

Desde esta perspectiva, entendemos que **saber Matemática** requiere dominar los conocimientos de esta disciplina para utilizarlos como instrumentos en la resolución de problemas, y también para definirlos y reconocerlos como objetos de una cultura.

Reconsiderar el sentido de la Matemática en la escuela

La concepción que cada persona se va formando de la Matemática depende del modo en que va conociendo y usando los conocimientos matemáticos. En este proceso, la escuela tiene un rol fundamental, ya que es allí donde se enseña y se aprende de un modo sistemático a usar la Matemática. El tipo de trabajo que se realice en la escuela influirá fuertemente en la relación que cada persona construya con esta ciencia, lo que incluye el hecho de sentirse o no capaz de aprenderla.

Cuando la enseñanza de la Matemática, en lugar de plantearse **como la introducción a la cultura de una disciplina científica,** se presenta solo como el dominio de una técnica, la actividad en el aula se limita a reconocer, luego de las correspondientes explicaciones del maestro, qué definición usar, qué regla hay que aplicar o qué operación "hay que hacer" en cada tipo de problema. Se aprende qué hacer, pero no para qué hacerlo ni en qué circunstancia hacer cada cosa. Esta enseñanza ha derivado en dificultades que ya conocemos: por una parte, aunque permite que algunos alumnos logren cierto nivel de "éxito", cuando el aprendizaje se evalúa en términos de respuestas correctas para problemas tipo, deja afuera a muchos alumnos que no se sienten capaces de aprender Matemática de este modo. Por otra parte, lo así aprendido se demuestra claramente insuficiente en el momento en que se trata de usar los conocimientos para resolver situaciones diferentes de aquellas en las que se aprendieron.

Otras veces, la actividad en el aula incluye la resolución de problemas diversos, y se pasa de uno a otro y a otro sin un trabajo reflexivo que vuelva sobre lo realizado. Trabajar solo resolviendo problemas, sin explicar o fundamentar "matemáticamente", también es insuficiente. El trabajo que implica volver sobre lo realizado, por uno mismo o por los compañeros, exige siempre una explicitación, un reconocimiento y una sistematización del conocimiento que se pone en juego en la resolución de los problemas, en las formas de obtenerlo y de validarlo. Sin este proceso, los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela (las nociones y las formas de trabajar en Matemática) no tendrán, a futuro, las mismas posibilidades de reutilización, ya que quedarían asociados a su uso en algunos casos particulares.

En síntesis, "cómo" se hace Matemática en el aula define, al mismo tiempo, "qué" Matemática se hace, y "para qué" y "para quiénes" se la enseña, lo que plantea una disyuntiva central en relación con la construcción de las condiciones que posibilitan el acceso a la Matemática de unos pocos o de todos.

Priorizar un tipo de trabajo matemático

Resulta pues vital que prioricemos en la escuela, desde el momento en que los niños se inician en el estudio de la Matemática, la **construcción del sentido** de los conocimientos por medio de la resolución de problemas y de la reflexión sobre estos, para promover así un modo particular de trabajo matemático que esté al alcance de todos los alumnos y que suponga para cada uno:

- Involucrarse en la resolución del problema presentado, vinculando lo que se quiere resolver con lo que ya se sabe y plantearse nuevas preguntas.

- Elaborar estrategias propias y compararlas con las de sus compañeros considerando que los procedimientos incorrectos o las exploraciones que no los llevan al resultado esperado son instancias ineludibles y necesarias para el aprendizaje.
- Discutir sobre la validez de los procedimientos realizados y de los resultados obtenidos.
- Reflexionar para determinar qué procedimientos fueron los más adecuados o útiles para la situación resuelta.
- Establecer relaciones y elaborar formas de representación, discutirlas con los demás, confrontar las interpretaciones sobre ellas y acerca de la notación convencional.
- Elaborar conjeturas, formularlas, comprobarlas mediante el uso de ejemplos o justificarlas utilizando contraejemplos o propiedades conocidas.
- Reconocer los nuevos conocimientos y relacionarlos con los ya sabidos.
- Interpretar la información presentada de distintos modos, y pasar de una forma de representación a otra según su adecuación a la situación que se quiere resolver.
- Producir textos con información matemática avanzando en el uso del vocabulario adecuado.

Elegir los problemas

Estamos afirmando que el sentido de los conocimientos matemáticos se construye al resolver problemas y reflexionar sobre ellos. Esto nos plantea, en principio, algunos interrogantes centrales: ¿qué problemas presentamos?, ¿cómo conviene seleccionar el repertorio de actividades para un determinado contenido y un grupo particular de alumnos?

En principio, la posibilidad de dominar una noción matemática con suficiente nivel de generalidad como para poder utilizarla en distintas situaciones dependerá de que la variedad de problemas considerados al estudiarla sea representativa de la diversidad de contextos de uso, de significados y de representaciones asociados a la noción. También habrá que tener en cuenta que la noción que se quiere enseñar surja como una “herramienta necesaria” para resolver el problema y no como una definición que hay que aplicar, y que la presentación de la información no fomente ideas estereotipadas acerca de los modos de resolución.

Consideramos que cada actividad constituye un **problema matemático** para un alumno en la medida en que involucra un enigma, un desafío a sus conocimientos matemáticos, es decir, si estos le permiten iniciar la resolución del problema y, para hacerlo, elabora un cierto procedimiento y pone en juego las nociones que tiene disponibles, modificándolas y estableciendo nuevas relaciones.

En este sentido, la actividad que puede resultar problemática para un alumno no lo es necesariamente para otro, puesto que depende de los conocimientos de que dispone. Así, para atender la heterogeneidad en cada grupo de alumnos respecto de sus conocimientos iniciales y dar a todos la posibilidad de construir una solución es necesario plantear buenas preguntas, confiar en que todos los niños pueden responderlas de algún modo, admitir diferentes procedimientos y, luego, trabajar con los conocimientos que surjan para avanzar hacia los que se quiere enseñar por medio del planteo de nuevas preguntas.

Los contextos

Se parte de la idea de que una noción matemática cobra sentido a partir del conjunto de problemas en los cuales resulta un instrumento eficaz de resolución.

Esos problemas constituyen el o los contextos para presentar la noción a los alumnos. Por ejemplo, el cálculo de puntos en un juego, la construcción de una figura, la elaboración de un procedimiento para realizar un cálculo son contextos posibles para presentar la suma, los rectángulos o la propiedad conmutativa.

Para cada noción es posible considerar diferentes contextos que nos permitan plantear problemas en los que la resolución requiera su uso. Estos contextos podrán ser matemáticos o no, incluyendo entre estos últimos los de la vida cotidiana, los ligados a la información que aparece en los medios de comunicación y los de otras disciplinas.

Por ejemplo, la noción de multiplicación de decimales es frecuentemente tratada por medio de la resolución de problemas, como *¿Cuál es el precio de 2,5 kg de carne sabiendo que el kg vale $ 8,7?* En este caso, se trata de un **contexto no matemático** de la vida cotidiana. También habrá que plantear que *calculen el área de un rectángulo de 2,5 de base y 8,7 de altura* (expresadas en una unidad arbitraria de longitud), que también requiere realizar una multiplicación. En este caso se trata de un **contexto matemático.** En los dos casos, la multiplicación es el instrumento que resuelve el problema: la noción está contextualizada y "funciona" en esos casos particulares.

En este sentido, al producir la solución, el alumno sabe que en ella hay conocimiento matemático, aunque no logre identificar cuál es. Para que pueda reconocerlo, tendremos que intervenir nombrando las nociones del modo en que se usa en la disciplina y reformulando las conclusiones alcanzadas por el grupo con representaciones lo más próximas posibles a las convencionales, es decir reconociendo como conocimientos matemáticos los que se usaron como instrumento de resolución, ahora independientemente del contexto. Asimismo, se podrán relacionar esos conocimientos con otros que fueron trabajados anteriormente.

Al presentar cada noción en diferentes contextos, y descontextualizarla cada vez, se amplía el campo de problemas que los alumnos pueden resolver con ella. De este modo, con cada nuevo problema, los chicos avanzan en la construcción de su sentido.

En todos los casos, los contextos tendrán que ser **significativos** para los alumnos, es decir que implicarán un desafío que puedan resolver en el marco de sus posibilidades cognitivas y sus experiencias sociales y culturales previas. Asimismo, los conocimientos involucrados en el problema deberán cobrar interés para ellos y ser coherentes desde el punto de vista disciplinar.

Al interactuar en su vida social, los niños aprenden las prácticas habituales de cada comunidad y construyen saberes, algunos de los cuales están ligados a la Matemática. Son estos saberes los que debemos recuperar en la escuela para vincularlos con los conocimientos que deben aprender, ya sea para reconocerlos como parte de ellos y sistematizarlos, como para utilizarlos en nuevos contextos. De este modo, es esperable que los alumnos puedan incorporar en su vida cotidiana nuevas prácticas superadoras y valorar el aporte brindado por la escuela para su adquisición.

Los resultados de investigaciones realizadas sobre el uso de conocimientos matemáticos en situaciones de la vida cotidiana, como hacer compras de alimentos, dan cuenta de los múltiples factores que determinan las decisiones que tomamos acerca de "cuánto" compramos y muestran que a veces no utilizamos conocimientos matemáticos. Por ejemplo, tenemos en cuenta las preferencias o necesidades de los integrantes de la familia y no sólo la relación precio/cantidad o restringimos la compra a la cantidad de dinero disponible. Al formular ese tipo de problemas con propósitos de enseñanza, seleccionamos algunos datos que intervienen en la situación o contexto real. Así, las relaciones que se establecen entre los datos para encontrar la respuesta están más relacionadas con los conocimientos que se quieren enseñar que con la situación real que da origen al problema.

Al elegir los problemas, también es esencial revisar los enunciados y las preguntas que presentamos, pues muchas veces se incluyen preguntas que carecen de sentido en sí mismas, pues no aluden a problemas reales o verosímiles. Por ejemplo, si en un enunciado se habla de la suma de las edades de dos hermanos o de la cantidad de hormigas de dos hormigueros, cabe preguntarse quién puede necesitar estos valores y para qué.

Un contexto muy utilizado en la clase de Matemática es el de los juegos. El sentido de incluirlo va más allá de la idea de despertar el interés de los alumnos. Jugar permite "entrar en el juego" de la disciplina matemática, pues se eligen arbitrariamente unos puntos de partida y unas reglas que todos los participantes acuerdan y se comprometen a respetar. Luego, se usan estrategias que anticipan el resultado de las acciones, se toman decisiones durante el juego y se realizan acuerdos frente a las discusiones.

No debemos perder de vista que, al utilizar el juego como una actividad de aprendizaje, la finalidad de la actividad para el alumno será ganar, pero nuestro propósito es que aprenda un determinado conocimiento. Por eso, el hecho de jugar no es suficiente para aprender: la actividad tendrá que continuar con un momento de reflexión durante el cual se llegará a conclusiones ligadas a los conocimientos que se utilizaron durante el juego. Luego, convendrá plantear problemas de distinto tipo en los que se vuelvan a usar esos conocimientos: partidas simuladas, nuevas instancias de juego para mejorar las estrategias, tareas a realizar con los conocimientos descontextualizados.

Los significados

Cada noción matemática resuelve un cierto conjunto de problemas; sin embargo, no tiene el mismo significado en todos los casos. Por ejemplo, el número racional 3/4 es respuesta a distintos problemas. Veamos algunos: *Si de 4 bolitas, 3 son negras, ¿qué parte de las bolitas es negra?; María tiene 3 tortas para repartir en partes iguales entre sus 4 hijos, ¿cuánto come cada uno?; si el segmento A mide 3 cm y el segmento B mide 4 cm, ¿cuál es la medida de A en relación a B?* En estos problemas se establecen diferentes relaciones entre las cantidades involucradas. En el primer problema, 3/4 representa la relación entre una parte (en este caso subconjunto de cardinal 3) con el todo (conjunto de cardinal 4). En el segundo problema, 3/4 indica el resultado de dividir 3 entre 4 (en este caso repartir 3 entre 4), mientras que en el tercer problema, indica la medida de un objeto, resultado de la comparación entre los tamaños del segmento A y del segmento B.

Cada uno de estos significados exige y pone en funcionamiento aspectos diversos del concepto de número racional y también de distinto orden de complejidad. Esto obliga a pensar en cómo es posible organizar su abordaje en el tiempo.

A lo largo de su recorrido por el Segundo Ciclo, los alumnos deben ir trabajando con estos significados, pero a su vez en cada uno de ellos se requiere del planteo de distintos problemas que permita tratar aspectos relativos al orden de racionales, a la equivalencia, a la operatoria aditiva y multiplicativa. Esto indica que para cada significado es necesaria la construcción de un conjunto de problemas de diferentes niveles de complejidad.

Las representaciones

En el conjunto de problemas que seleccionamos también es necesario tener en cuenta las distintas representaciones posibles de la noción que queremos enseñar, ya que la posibilidad de avanzar en la comprensión de una noción implica reconocerla en sus distintas representaciones pudiendo pasar de una a otra y elegir la más conveniente en función del problema a resolver.

Es importante señalar que, por ejemplo, cuando no se articulan las distintas representaciones del mismo número racional, muchos niños conciben “las fracciones” como objetos distintos de “los números decimales”. Para representar un mismo número racional se pueden escribir las siguientes expresiones: 1 + 1/2; 1 1/2; 3/2; 3 x 1/2; 1,5 y 1,50, utilizar la recta numérica, establecer equivalencias con otras expresiones fraccionarias y decimales o expresiones como: 1 + 5 x 1/10 o 150%. Sin embargo, y aunque podrían ser usadas indistintamente en tanto refieren al mismo número, los contextos de uso y las estrategias de cálculo suelen determinar la conveniencia de utilizar una u otra representación.

Otras representaciones de las fracciones que suelen aparecer en las producciones de los alumnos son distintas formas gráficas, como círculos o rectángulos. En estos casos, deberían ser analizadas en el grupo, socializadas, para darles un lugar entre los conocimientos construidos en la clase y, posteriormente, incluirlas en las actividades que presentemos. El tiempo que aparentemente se “pierde” en este trabajo de analizar las representaciones en función del problema que se está resolviendo, se “gana” en la significatividad que cobran para el alumno. Del mismo modo, el uso o no de materiales “concretos” debería ser decidido por el alumno en función de sus necesidades, que estarán ligadas al estado de sus conocimientos.

Asimismo, en Geometría, para representar una figura se usan dibujos, textos que describen el conjunto de propiedades que cumple e instructivos que permiten construirla. Durante este Ciclo, habrá que propiciar discusiones acerca de las características de estas distintas representaciones, y la transformación de una en otra, para que los alumnos avancen en la conceptualización de los objetos matemáticos y los diferencien de sus representaciones. En este caso, el obstáculo fundamental es la identificación de una figura con un dibujo particular.

Al plantear los problemas, deberemos promover que la representación que cada alumno utilice sea una forma de expresar lo que está pensando, y que el debate posterior a las producciones sobre la pertinencia y economía de estas permita su evolución hacia las representaciones convencionales. Que los alumnos vayan evolucionando en el uso de las representaciones será una tarea a largo plazo.

Las relaciones entre preguntas y datos

Algunos de los problemas que se presentan y funcionan como contexto para utilizar una noción permiten trabajar lo que denominamos **tratamiento de la información.** En estos casos, tanto para los contenidos del Eje “Número y Operaciones”, como para el de “Geometría y Medida”, lo que se pone en juego es la relación entre las preguntas y la construcción de datos para responderlas.

Muchas veces, detectamos que los alumnos intentan resolver un problema aritmético buscando la operación que deben realizar para solucionarlo. Esa forma de enfrentarse al problema está fomentada por la estructura y el contenido de muchos enunciados que forman parte de la tradición escolar y por el tratamiento que se les da en clase. En ellos suelen aparecer todos los datos necesarios para responder a la pregunta que se hace y esta se refiere al resultado de una operación entre ellos. En muchos casos, además, el maestro que ya enseñó los cálculos propone a los alumnos que identifiquen “la” operación y espera que resuelvan el problema sin dificultad.

La resolución de problemas requiere, en cambio, generar en los chicos la necesidad de leer e interpretar el enunciado o la información que se presenta para construir una representación mental de la situación que les permita plantearse alguna estrategia inicial para su resolución. Esta necesidad se puede instalar variando tanto la forma de presentación del enunciado como el tipo de tarea que el alumno debe realizar, e incluyendo problemas que tengan una, varias o ninguna solución.

Los enunciados pueden ser breves relatos o textos informativos de otra área de conocimiento, tener datos “de más” e incluir imágenes. Las preguntas también serán variadas: algunas no se podrán contestar, otras se contestarán con un dato y sin operar, y otras requerirán hacer una operación, pero la respuesta podrá ser una información diferente del resultado de la misma. También los alumnos podrán proponer problemas, para lo cual se puede dar información y pedir que formulen preguntas o presentar datos y respuestas para elaborar una pregunta que los relacione. A la vez, tendremos que organizar la clase de modo que cada alumno pueda interpretar el problema y tomar una primera decisión autónoma a propósito de su resolución.

En Geometría, la tradición escolar sólo incluye problemas para el caso de cálculos de medidas, como el perímetro, la superficie y el volumen, y su tratamiento es el mismo que el mencionado.

La propuesta de este enfoque es problematizar el trabajo con las construcciones, considerándolas un medio para conocer las propiedades geométricas. En este sentido, las actividades de reproducción de figuras permiten a los alumnos poner en juego en forma implícita las propiedades involucradas y avanzar luego hacia otras que requieran su explicitación. Además, en Segundo Ciclo es importante proponer problemas con una, varias o ninguna solución, como por ejemplo determinar cuáles son las figuras que cumplen un conjunto de condiciones iniciales.

Construir condiciones para resolver problemas

Para que cada alumno se involucre en el juego matemático, además de elegir un problema desafiante pero adecuado para sus conocimientos, y en el que la noción a enseñar sea un instrumento eficaz de resolución, es necesario tener en cuenta un conjunto de condiciones: cuáles son los materiales necesarios, qué interacciones prevemos derivadas de la forma de organizar la clase y nuestras intervenciones durante su transcurso.

Cuidar estas condiciones, anticiparlas al planificar la clase, es, en realidad, uno de nuestros grandes desafíos como maestros.

Las situaciones de enseñanza

En algunas ocasiones, la tarea que se propone al alumno puede presentarse sólo mediante el enunciado de un problema o con una pregunta para un conjunto bien elegido de cálculos o con un interrogante que deba ser respondido a partir de una información publicada en el diario o en un texto de Ciencias Naturales o de Ciencias Sociales. En otras ocasiones, habrá que proporcionar los instrumentos de Geometría para realizar una construcción o los materiales para un juego –por ejemplo dados y tablas para anotar puntajes–, el croquis de un recorrido, un mapa, etc. En todos los casos, una primera condición es asegurarnos de tener disponibles los **materiales** a utilizar.

También habrá que anticipar cuál es el **tipo de interacciones** que queremos que se den para organizar distintos momentos de la clase: las de cada alumno y el problema, las de los alumnos entre sí y las de los alumnos con el maestro. Para ello, habrá que proponer, según convenga y de manera no excluyente, momentos de trabajo en forma individual, en pequeños grupos o con toda la clase.

Los niños podrán realizar diferentes tareas. En algunas ocasiones, trabajarán usando los conocimientos matemáticos de manera implícita, sin nombrarlos ni escribirlos, por ejemplo, al medir, construir, decidir cómo jugar o calcular. En otras, utilizarán los conocimientos matemáticos de manera explícita: tendrán que describir cómo midieron o calcularon, qué instrumentos usaron para construir y qué hicieron en cada paso, o producirán un instructivo para que otro construya una figura o realice un cálculo, explicarán por qué decidieron utilizar un procedimiento u otro, cómo pueden comprobar que un resultado es adecuado. También darán razones para convencer a otro compañero de que los números encontrados o las figuras dibujadas cumplen con las condiciones del problema; tendrán que argumentar sobre si un procedimiento es o no correcto. En otras oportunidades, será el maestro el que presente una afirmación para que los alumnos discutan sobre su validez.

En Segundo Ciclo, es importante también que los alumnos comiencen a analizar el **nivel de generalidad** que tienen las respuestas a los problemas que resuelven. Así, comprobar que se pueden obtener dos triángulos iguales plegando un cuadrado de papel glasé no es suficiente para afirmar que las diagonales de cualquier cuadrado son congruentes. Asimismo, habrá que descubrir y explicitar que algunas afirmaciones son verdaderas en un campo numérico, o para un conjunto de figuras, y no lo son para otros. Por ejemplo, el producto de una multiplicación es mayor que cualquiera de sus factores, siempre que se opera con números naturales, pero esto no es cierto si, por ejemplo, los factores son números racionales menores que 1.

Al anticipar el desarrollo de la clase y prever las condiciones necesarias para que ocurran las interacciones que nos interesan, diseñamos una **situación problemática** a propósito del conocimiento que queremos enseñar. Esta situación incluye un conjunto de elementos y relaciones que estarán presentes en la clase: el problema, los materiales, una cierta organización del grupo, un desarrollo con momentos para diferentes intercambios. Al planificar, también anticipamos los diferentes procedimientos y las representaciones que podrán usar los alumnos, nuestras preguntas y las conclusiones matemáticas posibles.

La gestión de la clase

Hemos planteado ya que, para que los alumnos desarrollen el tipo de trabajo matemático que buscamos promover, serán fundamentales las intervenciones del docente durante la clase.

El trabajo de resolución de problemas que se propone en este enfoque genera muchas veces inseguridad. Pensamos: *¿cómo voy a presentar este problema si no muestro antes cómo hacerlo?*, *¿cómo voy a organizar la clase si cada uno responde de una manera distinta?* o *¿cómo voy a corregir si hay distintos procedimientos en los cuadernos?* Respecto de la primera pregunta, para iniciar el aprendizaje de un nuevo conocimiento en el proyecto de cada año escolar tendremos que **presentar un problema** asegurándonos de que todos hayan comprendido cuál es el desafío que se les propone. Para que cada alumno acepte ocuparse de él, es esencial generar el deseo de resolverlo. Este tipo de intervención, que busca que el alumno se haga cargo de la resolución, es siempre parte del inicio de la clase, pero puede reiterarse en distintos momentos, toda vez que sea necesario y oportuno. Es una invitación para que el chico resuelva por sí solo y no una orientación sobre cómo debe hacerlo o qué debe hacer.

Para comenzar, los niños lo **resuelven** de manera individual o en pequeños grupos, con diferentes procedimientos, según los conocimientos de los que dispone cada uno. Por ejemplo, en 4° año/grado, aunque aún no se haya trabajado sobre las cuentas de dividir es posible plantear a los niños un problema como: *Los lápices se venden en paquetes de a 10, ¿cuántos paquetes se deben comprar para dar un lápiz a los 127 niños de la escuela? ¿Y si fueran 250 niños?* Los niños podrán recurrir a una variedad de procedimientos para resolverlo: procedimientos aditivos o sustractivos, de a diez, de a dobles; o procedimientos multiplicativos.

Luego, habrá que dar lugar a un **intercambio** donde participen todos los alumnos y en el que se vayan explicando las diferentes aproximaciones al conocimiento que se quiere enseñar, y debatir sobre ellas. Al analizar las diferentes soluciones, tendremos que valorizar de igual modo todas las producciones, ya sea que permitan o no arribar a una respuesta al problema planteado.

Al dar lugar a la presentación y explicación de los procedimientos utilizados por los chicos, es necesario animarlos a **dar razones** de lo realizado, a explicar por qué lo hicieron de cierta forma, a argumentar sobre la validez de sus producciones. Esto les permitirá volver sobre lo que han pensado, para analizar sus aciertos y errores, y controlar, de este modo, el trabajo. Alentarlos a hablar o participar a aquellos que no lo hacen espontáneamente significa trabajar suponiendo que los chicos pueden progresar y no que van a fracasar.

En algún caso, recuperar todas las producciones escritas distintas, y presentarlas en conjunto para compararlas y discutir cómo mejorar cada una, puede contribuir a "despersonalizar" las mismas, focalizando el análisis en su validez o nivel de generalidad y no en los conocimientos de quienes las elaboraron. Así el "error" de unos se capitaliza en la reflexión de todos.

Este trabajo incorpora a los alumnos en el proceso de evaluación en un lugar diferente del habitual, donde quedan a la espera de la palabra del docente que les ratifica de inmediato si lo que hicieron está bien o no. Si han asumido como propia la tarea de resolución, querrán saber si lo producido es o no una respuesta a la pregunta que organizó el quehacer matemático en el aula. El debate del conjunto de la clase dará por válida o no una respuesta, y llevará a la modificación de los procedimientos que conducen a errores.

En un comienzo, las razones que los alumnos den al debatir se apoyarán en ejemplos, comprobaciones con materiales como plegar papeles o tomar medidas, entre otros casos, para luego avanzar hacia el uso de propiedades.

A la vez, estas últimas se enunciarán con distintos niveles de generalidad; por ejemplo, pasaremos de: *Podés hacer 4 + 3 y te da lo mismo que 3 + 4*, en el Primer Ciclo, a: *Al sumar es posible cambiar el orden de los números*, en el Segundo Ciclo.

Con la intervención del maestro, se reconocerán y sistematizarán los saberes que se van descubriendo. Esta tarea de establecer relaciones entre las conclusiones de la clase y el conocimiento matemático al que se pretende llegar, introduciendo las reglas y el lenguaje específicos, y entre los conocimientos ya incorporados y los nuevos, es una tarea que está siempre a cargo del maestro y que resulta imprescindible para que los alumnos identifiquen qué han aprendido. Para esto, no tenemos que basarnos en ningún esquema rígido. Esas intervenciones pueden darse en distintos momentos, siempre que sean oportunas; es decir que lleguen después de que los alumnos hayan desplegado sus propios razonamientos.

El camino propuesto no implica diluir la **palabra del maestro.** Cuando los chicos están resolviendo los problemas solos o con su grupo, el maestro podrá pasar cerca de cada uno, atendiendo lo que van haciendo, los términos que usan, lo que escriben, quiénes no participan y quiénes siguen atentamente –aun sin hablar– lo que hacen sus compañeros. De tal modo, el maestro tendrá un registro del conjunto de conocimientos que se despliegan en la clase. Esta información será fundamental para tomar decisiones en el momento del debate: ¿qué grupo conviene que hable primero?, ¿cuáles tienen una respuesta similar?,

¿qué procedimiento es el más potente para hacer avanzar el debate hacia el conocimiento que se espera enseñar? Esto permitirá optimizar el tiempo dedicado a la puesta en común, de manera que no resulte tediosa para los alumnos ya que, cuando los procedimientos son muy similares, bastará con tomar como objeto de análisis la producción de uno solo de los grupos.

El docente tampoco queda al margen del debate de la clase, puesto que es él quien lo conduce. A veces, las conclusiones a las que los chicos llegan en conjunto son parcialmente válidas. Allí, el maestro podrá decir, por ejemplo: *Por ahora acordamos que resolvemos así; en la próxima clase lo seguiremos viendo.* De esta manera, interviene en el proceso sin anticiparse, pero dejando marcas, planteando la provisoriedad de lo acordado o alguna contradicción que queda pendiente por resolver. Así, no invalidaremos el trabajo de la "comunidad clase", pero dejaremos instalado que hay alguna cuestión que hay que seguir discutiendo.

En relación con el modo de **organizar la clase** frente a las distintas respuestas y tiempos de trabajo de los niños, los docentes muchas veces planteamos situaciones para que sean resueltas por todo el grupo, lo que nos permite valorar, corregir, hacer señalamientos a las intervenciones de los alumnos.

Es cierto que es más fácil llevar adelante el trabajo colectivo sobre un único procedimiento, pero de este modo se corre el riesgo de que solo un grupo de alumnos participe activamente siguiendo al maestro, mientras otros se quedan al margen de la propuesta; y aunque todos lo siguieran, lo aprendido se limita a una única manera de pensar.

La alternativa que proponemos a la organización habitual de la clase, según nuestros objetivos, será organizar la actividad de distintas maneras: individual, por pares o grupos de más alumnos, y aun con distintos tipos de tareas para cada grupo o dentro del mismo grupo, alentando la movilidad de los roles y estando atentos a la posible configuración de estereotipos que, lamentablemente, algunas veces hacen que la discriminación se exprese en la clase de Matemática. Tanto los momentos de trabajo individual como los compartidos en grupo aportan al alumno un tipo de interacción diferente con el conocimiento, por lo que ambos deberán estar presentes en la clase.

Muchas veces, cuando estamos a cargo de un **plurigrado**, separamos a los niños según el año/grado que cursan, y vamos atendiendo a un grupo por vez. Sin embargo, a la hora de realizar adaptaciones a las actividades presentadas, es importante tener en cuenta el enfoque de enseñanza, de manera de no perder la riqueza de las propuestas que ofrecemos. Por ejemplo, para alcanzar determinados aprendizajes, es indispensable generar espacios de debate en los que deberían participar alumnos que compartan repertorios de conocimientos y niveles de análisis similares. Sin embargo, ocurre muy frecuentemente que en estos escenarios haya solo uno o que sean muy pocos los alumnos en alguno de los años/grados, lo que hace imposible organizar un verdadero debate entre ellos. En estos casos, proponemos agrupar niños de varios años/grados y organizar actividades con un contexto común, proponiendo una tarea distinta a cada grupo, de modo que los desafíos sean adecuados a los distintos conocimientos de los alumnos. Esto permite que en el momento de la confrontación todos los alumnos puedan entender las discusiones que se originen e incluso puedan participar de las mismas, aunque no sean originadas por la actividad que le correspondió a su grupo. Por ejemplo, se podría proponer para grupos armados con niños de 4º, 5º y 6º año/grado un juego como “La escoba del uno”[1] de cartas con fracciones, diferenciando la complejidad a la hora de analizar las partidas simuladas.

En esta propuesta, **el cuaderno o la carpeta** tiene diferentes funciones: en él, cada chico ensaya procedimientos, escribe conclusiones que coinciden o no con su resolución y, eventualmente, registra sus progresos, por ejemplo, en tablas en las que da cuenta del repertorio de cálculos que ya conoce. De este modo, el cuaderno o la carpeta resultan un registro de la historia del aprendizaje y los docentes podemos recuperar las conclusiones que los alumnos hayan anotado cuando sea necesario para nuevos aprendizajes.

En este sentido, conviene además conversar con los padres que, acostumbrados a otros usos del cuaderno, pueden reclamar o preocuparse al encontrar en él huellas de errores que para nosotros juegan un papel constructivo en el aprendizaje. De todos modos, es recomendable discutir con el equipo de colegas de la escuela cómo se registra en el cuaderno la presencia de una producción que se revisará más adelante.

También el **pizarrón** tiene diferentes funciones. Allí aparecerá todo lo que sea de interés para el grupo completo de la clase, por ejemplo: los procedimientos que queremos que los alumnos comparen, escritos por un representante del grupo que los elaboró o por el maestro, según lo que parezca más oportuno. Convendrá usar también papeles afiche o de otro tipo para llevar el registro de las conclusiones, como tablas de productos, acuerdos sobre cómo describir una figura, etc., para que el grupo las pueda consultar cuando sea necesario.

Promover la **diversidad de producciones** es un modo de incluir a todos en el aprendizaje, de generar confianza en las propias posibilidades de aprender y de poner en evidencia la multiplicidad de formas de pensar frente a una misma cuestión, así como la necesidad de acordar cuáles se consideran adecuadas en función de las reglas propias de la Matemática.

[1] Actividad propuesta en este *Cuaderno*.

Es muy importante instalar en la escuela las condiciones necesarias para que los niños sientan que los **errores** y los **aciertos** surgen en función de los conocimientos que circulan en la clase, es decir que pueden ser discutidos y validados con argumentos y explicaciones. Es así como pretendemos que los niños vayan internalizando progresivamente que la Matemática es una ciencia cuyos resultados y progresos se obtienen como consecuencia necesaria de la aplicación de ciertas relaciones y del debate entre quienes las plantean, y no como una práctica de la adivinación o del azar o un saber que no sufre transformaciones.

De todos modos, sabemos que seleccionar problemas y secuencias de actividades que puedan ser abordadas por los alumnos de la clase con distintas herramientas, e intervenir convenientemente para que todos puedan avanzar, supone para nosotros una dificultad mucho mayor que la de presentar un problema que la mayoría resuelve de la misma manera. Quizá nos dé un poco de tranquilidad saber que a trabajar en grupo se aprende y que, en el inicio de este aprendizaje, hay que tolerar una cuota de desorganización, hasta que los alumnos incorporen la nueva dinámica.

Una cuestión ligada a la organización de la enseñanza que conviene tener en cuenta es la de articular, en cada unidad de trabajo, algún conjunto de actividades que formen una secuencia para desarrollar cierto contenido. El criterio que utilizamos al presentar algunos ejemplos en el apartado "Propuestas para la enseñanza" es que en cada nueva actividad de una misma secuencia se tome como conocimiento de partida aquel que haya sido sistematizado como conclusión en la anterior.

Otra cuestión también ligada a la elaboración de una unidad de trabajo, y que permite mejorar el **uso del tiempo de clase,** es la articulación de contenidos. Algunos contenidos relacionados con distintos NAP pueden abordarse en una misma unidad y aún en una misma secuencia. Por ello, es conveniente tener en cuenta que la presentación de los NAP no indica un orden de enseñanza y que, antes de armar las unidades, es indispensable tener un panorama de la totalidad de la propuesta.

Evaluar para tomar decisiones

En cuanto a los objetivos con que presentamos los problemas, podemos plantear distintas opciones: para introducir un tema nuevo, para que vuelvan a usar un conocimiento con el que trabajaron pero en un contexto distinto o con un significado o representación diferentes, o para recuperar prácticas ya conocidas que les permitan familiarizarse con lo que saben hacer y lo hagan ahora con más seguridad. Pero los problemas son también un tipo de tarea que plantearemos para evaluar.

Sin desconocer que cada maestro tomará decisiones de promoción y acreditación en función de acuerdos institucionales y jurisdiccionales sobre criterios y parámetros, queremos poner énfasis en la idea de que un sentido fundamental de la evaluación es recoger información sobre el **estado de los saberes de los alumnos,** para luego tomar decisiones que permitan orientar las estrategias de enseñanza.

Las producciones de los niños dan cuenta tanto de los resultados derivados de nuestras propias estrategias de enseñanza, como de lo que aprendieron y de sus dificultades.

El modo de trabajo propuesto en estas páginas introductorias permite tomar permanentemente información sobre qué saben los chicos acerca de lo que se ha enseñado o se desea enseñar. Los problemas seleccionados para iniciar cada tema pueden funcionar para tener algunos indicios de los conocimientos del grupo y considerarlos en un sentido diagnóstico para terminar de elaborar la unidad didáctica. De este modo, la evaluación diagnóstica, en lugar de focalizarse en el inicio del año, se vincula con la planificación de cada unidad y de cada secuencia de trabajo.

Al considerar las producciones de los alumnos, pueden aparecer errores de diferente origen, pero muchas veces los que llamamos "errores" no son tales. Algunos de ellos están vinculados con una distracción circunstancial, como copiar mal un número del pizarrón que sólo habrá que aclarar. Otros, en cambio, estarán mostrando una forma de pensar provisoria, por ejemplo, cuando los chicos dicen, frente al dibujo de un cuadrado, *Esta figura no es un rectángulo.* Esto último no es cierto si se considera que el cuadrado es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos, condición que caracteriza a los rectángulos. Sin embargo, las primeras clasificaciones que realizan los niños parten de la idea de que un objeto pertenece a una única clase: si una figura es un cuadrado, no puede ser un rectángulo.

Frente a los "errores" descubiertos será necesario analizarlos, intentar comprender cómo y por qué se producen y plantear actividades de distinto tipo. Tanto en el caso de cuestiones presentes en las producciones de muchos alumnos del grupo como respecto de algunas ideas provisorias como las mencionadas respecto de la multiplicación de números racionales y de las relaciones entre cuadrado y rectángulo, habrá que volver sobre la noción involucrada en ese momento, cuestionándolos con ejemplos que contradigan sus ideas. No es evitando los "errores" como se acorta el proceso de aprendizaje, sino tomándolos como se enriquece.

Avanzar año a año en los conocimientos de Segundo Ciclo

La mayoría de las nociones matemáticas que se enseñan en la escuela llevan mucho tiempo de elaboración, por lo que es necesario delinear un recorrido precisando el punto de partida y atendiendo al alcance progresivo que debiera tener el tratamiento de las nociones en el aula.

El Eje "Número y Operaciones" incluye como aprendizajes prioritarios, durante el Segundo Ciclo, avanzar en el conocimiento del sistema de numeración y de fracciones y decimales; y en el uso de las operaciones y las formas de calcular con naturales, fracciones y decimales para resolver problemas. Al finalizar el Ciclo, se espera lograr que los chicos puedan analizar las relaciones entre las distintas clases de números y sus distintas representaciones, iniciando la sistematización de relaciones numéricas y propiedades de las operaciones.

Para ello, en relación con los **números naturales** y según lo abordado en el Primer Ciclo, en el Segundo Ciclo se parte de los conocimientos que los niños tienen sobre las relaciones entre la serie numérica oral y la serie numérica escrita hasta el orden de las unidades de mil y las vinculaciones entre la descomposición aditiva y la descomposición aditiva y multiplicativa de los números (456 se puede descomponer como 400 + 50 + 6 y como 4 x 100 + 5 x 10 + 6 x 1) para trabajar con números más grandes, analizando equivalencias de escrituras, procedimientos de orden y comparación basados en distintas representaciones y la conveniencia de una u otra, según el problema puesto en juego.

Con respecto a los **números racionales**, en 3er año/grado los niños han tenido aproximaciones a algunas fracciones y algunos decimales surgidas al abordar situaciones del Eje "Geometría y Medida". En 4º año/grado se usan expresiones fraccionarias y decimales de los números racionales asociadas a contextos que les dan significado, como el de la medida, el de sistema monetario, situaciones de reparto y partición, para resolver problemas de equivalencia, orden, comparación, suma y resta o producto por un natural. También se inicia el trabajo con problemas en contexto matemático que se profundiza en 5º y 6º años/grados.

A partir de 5º año/grado, se aborda la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales, y se incluye la representación en la recta numérica. En 6º año/grado se incorpora la escritura porcentual y se avanza en la transformación de una expresión en otra, reconociendo además la conveniencia del uso de unas u otras según los problemas a resolver. Además, se inicia el reconocimiento de que las reglas del sistema de numeración estudiadas para los naturales se extienden a los racionales.

Otro aprendizaje prioritario del Eje "Número y Operaciones" es el de las **operaciones básicas,** tanto en relación con los problemas aritméticos que deben resolver los niños, como con las formas de calcular. En Segundo Ciclo, es esperable que los alumnos avancen en nuevos **significados** de la suma, la resta, la multiplicación y la división de los números naturales, y que calculen en forma exacta y aproximada con distintos procedimientos, incluyendo la construcción de otros más económicos. Este trabajo contribuirá a lo largo del ciclo a sistematizar relaciones numéricas y propiedades de cada una de las operaciones.

En particular, se iniciará en 5º año/grado la explicitación de las **relaciones de múltiplo/divisor** en la resolución de problemas, así como la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto en contextos matemáticos.

También comienzan a tratarse en forma sistemática las **relaciones de proporcionalidad,** ligadas inicialmente a la operatoria multiplicativa y avanzando hacia el análisis de sus propiedades. Los problemas que incluyen la representación de un conjunto organizado de datos mediante gráficos estadísticos (gráficos de barras, circulares y de líneas) resultan de interés para enriquecer los contextos de uso de estas relaciones.

En relación con las **formas de calcular,** es importante considerar como inicio del trabajo el uso de diferentes procedimientos en función de los conocimientos disponibles de los alumnos sobre los números involucrados y sobre las operaciones, antes de analizar y utilizar procedimientos más económicos.

La evolución de las formas de calcular con números naturales dependerá de la disponibilidad que tengan los alumnos tanto del repertorio multiplicativo como de las propiedades, de las intervenciones del docente, y de las comparaciones y validaciones que se hagan de las distintas formas de calcular que conviven en la clase. En particular, el cálculo escrito de la división debiera evolucionar desde estrategias de sucesivas aproximaciones en 4º año/grado, hasta lograr aproximaciones al dividendo en menos pasos.

La operatoria aditiva y la multiplicación por un entero con fracciones y decimales se inicia en 4º año/grado ligada a los contextos que le dan sentido. La misma avanza en 5º y 6º años/grados, tanto con las expresiones fraccionarias como con las decimales, con la intención de elaborar y comparar procedimientos de cálculo para llegar a sistematizarlos.

Al hablar de **tratamiento de la información** en relación con los contenidos del Eje "Número y Operaciones", nos referimos a un trabajo específico que permita a los alumnos desplegar en forma progresiva ciertas capacidades, como interpretar la información que se presenta en diferentes portadores (enunciados, gráficos, tablas, etc.), seleccionar y organizar la información necesaria para responder preguntas, diferenciar datos de incógnitas, clasificar los datos, planificar una estrategia de resolución, anticipar resultados.

La lectura y organización de la información, así como su eventual recolección a partir de experiencias significativas para los alumnos, se iniciará en 4º año/grado y avanzará en el Ciclo en las formas de representación en gráficos, finalizando en 6º año/grado con problemas que requieran tomar decisiones entre distintas alternativas de organización y presentación de datos.

En el Eje "Geometría y Medida" incluimos el estudio del **espacio**. Las referencias espaciales construidas en el Primer Ciclo se articulan progresivamente en un sistema que permite ubicar los objetos en el espacio sensible, y en la representación de ese espacio en el plano. En este Ciclo se avanza en el tamaño del espacio que se representa y en las referencias que se usen, comenzando por la elección de referencias por parte del alumno en 4º año/grado, y evolucionando hacia la inclusión de representaciones convencionales en función de un sistema de referencia dado, en 6° año/grado.

En paralelo con el estudio del espacio, se estudian los objetos **geométricos,** es decir las formas de dos y tres dimensiones. Para ello, es posible trabajar con las **figuras** y los **cuerpos** sin relacionarlos necesariamente con objetos del mundo sensible.

El avance de los conocimientos geométricos, en este Ciclo, no se plantea en relación con el repertorio de figuras y cuerpos, sino en función de las propiedades que se incluyan. Se inicia en 4° año/grado la consideración de bordes rectos o curvos, número de lados y de vértices, ángulos rectos o no para las figuras, y de las superficies curvas o planas, número y forma de las caras para el caso de los cuerpos. Para las figuras se avanza incluyendo el paralelismo de los lados y las propiedades de las diagonales. Se evolucionará también en el tipo de argumentaciones que se acepten como válidas –desde las empíricas hacia otras basadas en propiedades–, lo que irá en paralelo con la conceptualización de las figuras como objetos geométricos y con el uso de un vocabulario cada vez más preciso.

Los problemas del Eje "Geometría y Medida" en el Segundo Ciclo en principio funcionan como articuladores entre la Aritmética y la Geometría, en el sentido que permiten atribuir sentido a los números racionales y cuantificar ciertos atributos de los objetos y de las formas. Los problemas reales de medición efectiva de longitudes, capacidades, pesos y tiempo que se incluyan en cada año deben permitir al alumno elaborar una apreciación de los diferentes órdenes de cada magnitud y utilizar instrumentos para establecer diferentes medidas.

En este Ciclo se hace necesario, además, un trabajo profundo en relación con los cambios de unidades. En 4° año/grado habrá que establecer, a propósito de diferentes magnitudes, qué relación existe entre las unidades elegidas y las medidas correspondientes. Luego, se hace necesario avanzar en la comprensión de la organización decimal de los sistemas de unidades del SIMELA, lo que constituye un soporte interesante para la comprensión de la escritura decimal de los racionales. En 6° año/grado habrá que explicitar las relaciones de proporcionalidad involucradas en la expresión de una misma cantidad con distintas unidades.

Articular el trabajo en la clase de 6° año/grado

Al organizar unidades de trabajo, es necesario tener en cuenta, además de las decisiones didácticas que tome el docente, las vinculaciones matemáticas entre las nociones que se enseñan y que tienen que ver con su origen y, por lo tanto, con las características que le son propias.

El trabajo con los contenidos vinculados a "Número" y los vinculados a "Operaciones" supone, tanto para los naturales como para las fracciones y decimales, considerar relaciones de distinto tipo. El trabajo sobre numeración se relaciona con el de cálculo, dado que los métodos de cálculo, redondeo, aproximación y encuadramiento están ligados a la estructura del sistema de numeración decimal. Por su parte, las diferentes estrategias de cálculo exacto y aproximado dependen del significado que se les da a las operaciones en los distintos contextos.

En relación con los contenidos vinculados a "Geometría" y los vinculados a Medida, es necesario considerar que el estudio de las propiedades de las figuras y los cuerpos incluye nociones de medida, por ejemplo, las longitudes de los segmentos o las amplitudes de los ángulos.

A su vez, los contenidos de "Medida" se relacionan con los de "Número y Operaciones", ya que la noción de número racional, entendida como cociente entre enteros, surge en el contexto de la medición de cantidades. Por lo tanto, habrá que avanzar simultáneamente con la comprensión de los usos de los números racionales y del proceso de medir.

En relación con las decisiones didácticas, solo señalaremos en este apartado que los contenidos de tratamiento de la información son transversales a todas las unidades de trabajo. Presentar la información de diferentes modos en los problemas y variar la tarea, tanto en los problemas aritméticos como geométricos, dará lugar a que los alumnos no conciban la idea de problema de una manera estereotipada, tanto en lo que se refiere a la forma de los enunciados como a las formas de resolución y el número de soluciones a investigar.

nap

El reconocimiento y uso de los números naturales, de expresiones decimales y fraccionarias, de la organización del sistema decimal de numeración y la explicitación de sus características.

El reconocimiento y uso de las operaciones entre números naturales, fracciones y expresiones decimales, y la explicitación de sus propiedades

Número y Operaciones

EJE

Número y Operaciones

Los saberes que se ponen en juego

Para que los alumnos puedan aprender los saberes incluidos en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, en la escuela tendremos que proponer situaciones de enseñanza en las que se pongan en juego distintos aspectos de estos. Se trata de que los conocimientos matemáticos se introduzcan en el aula asociados con los distintos problemas que permiten resolver, para luego identificarlos y sistematizarlos.

- Interpretar, registrar, comunicar y comparar cantidades y números tanto para los números naturales como para fracciones y/o expresiones decimales y eligiendo la representación más adecuada en función del problema a resolver.
- Argumentar sobre la equivalencia de distintas representaciones y descomposiciones de un número[1].
- Comparar la organización del sistema decimal con la de otros sistemas, atendiendo a la posicionalidad y a la función del cero.
- Comparar fracciones y/o expresiones decimales a través de distintos procedimientos, incluyendo la representación en la recta numérica e intercalando fracciones y decimales entre otros números.
- Analizar afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que diferencian los números naturales de las fracciones y las expresiones decimales.

[1] Se incluyen tanto las descomposiciones ligadas a la estructura del sistema de numeración como la conversión de expresiones fraccionarias, decimales y porcentajes usuales (50 % = 1/2 = 0,5).

- Operar seleccionando el tipo de cálculo y la forma de expresar los números involucrados[2] que resulten más convenientes en función de la situación y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.
- Elaborar y comparar distintos procedimientos –incluyendo el uso de la constante de proporcionalidad– para calcular valores de cantidades que se corresponden o no proporcionalmente, evaluando la pertinencia del procedimiento en relación con los datos disponibles.
- Explicitar las características de las relaciones de proporcionalidad directa.
- Analizar relaciones entre cantidades y números para determinar y describir regularidades, incluyendo el caso de la proporcionalidad.
- Argumentar sobre la validez de un procedimiento o el resultado de un cálculo usando propiedades de las operaciones en distintos campos numéricos.
- Producir y analizar afirmaciones sobre relaciones numéricas vinculadas a la divisibilidad y argumentar sobre su validez.
- Interpretar y organizar información presentada en textos, tablas y distintos tipos de gráficos, incluyendo los estadísticos.
- Elaborar y comparar procedimientos[3] de cálculo –exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora– de multiplicaciones de fracciones y expresiones decimales incluyendo el encuadramiento de los resultados entre naturales y analizando la pertinencia y economía del procedimiento en relación con los números involucrados.
- Sistematizar resultados y estrategias de cálculo mental para operar con números naturales, fracciones y expresiones decimales.

[2] Seleccionar la forma de expresar los números implica decidir si se va a operar con fracciones o con expresiones decimales y, en este último caso, evaluar la cantidad de cifras decimales que se necesitan para expresar el resultado en función de la situación.

[3] Se incluye la comparación de procedimientos elaborados por los alumnos y de estos con otros, como estimaciones, representaciones gráficas, uso de escrituras aditivas y/o multiplicativas o equivalencias.

Propuestas para la enseñanza

En este apartado, intentamos precisar el alcance y el sentido de los conocimientos que se priorizan en el Eje "Número y Operaciones" a partir de algunos ejemplos de actividades para desarrollar en el aula y de producciones de los niños. Además, presentamos posibles secuencias de actividades que apuntan al aprendizaje de un contenido y muestran el tipo de trabajo matemático propuesto desde el enfoque explicitado al inicio de este *Cuaderno*, en el apartado "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo".[4]

Para analizar las relaciones entre los números y entre las representaciones

Sin duda las concepciones numéricas constituyen una de las construcciones cognitivas más importantes de la escolaridad. La apropiación de los conocimientos numéricos es un proceso largo y complejo. Al respecto, Gerard Vergnaud,[5] psicólogo dedicado al aprendizaje matemático, afirma:

Si las propiedades más elementales del concepto de número comienzan a ser comprendidas a la edad de 3 o 4 años, la plena comprensión de los números relativos (los enteros) y de los números racionales no está adquirida para la mayoría de los alumnos de 15 años; y es bien claro que les queda a los alumnos un largo camino por recorrer aún, para comprender todas las propiedades de los números reales.

Es posible inferir entonces que la evolución, desde las primeras ideas intuitivas que tienen los niños hasta el conocimiento de carácter algebraico que pueden lograr en algún momento de la escuela media, se desarrolla en un tiempo prolongado. En este sentido, resulta valioso que las propuestas estén orientadas a dar significado a los nuevos números que van apareciendo en las diferentes etapas de la escolaridad.

Conocer los números implica no sólo conocer los modos de referirse a ellos en forma escrita u oral, es decir, sus representaciones (con símbolos numéricos, en la recta numérica), sino también sus propiedades, las relaciones que pueden

[4] **Recomendación de lectura:** En reiteradas ocasiones se propondrán actividades a partir de lo que se ha realizado el año/grado anterior. En los casos en que los chicos no hayan realizado dicho trabajo u otro similar, es conveniente consultar *Cuadernos para el aula: Matemática 5,* para que, en función de los conocimientos del grupo, el docente decida cómo adaptar la propuesta que allí se incluye.

[5] "La apropiación del concepto de número: un proceso de largo aliento", en Bideau, J., Meljac, M. y Fisher J. P. (1991), *Les chemins du nombre.* París, Presses Universitaires de Lille.

establecerse entre ellos (de orden, aditivas o multiplicativas), cómo intervienen en los cálculos, cómo se usan en las operaciones que resuelven problemas y, más adelante, el tipo de estructura que forman.

En este apartado, nos referiremos a los números naturales y racionales, sus diferentes formas de representación y también a sus propiedades y las relaciones de orden entre ellos. El número es un objeto matemático que remite a un cierto número de relaciones lógico matemáticas y existen diferentes tipos de números que permiten dar respuesta a diferentes tipos de problemas. Entre ellos, los números naturales se comienzan a estudiar desde los primeros años de la escolaridad primaria y los números racionales, abordados como fracciones y como números decimales, se incorporan entre 3° y 4° año/grado.

Las formas de representación de los números con símbolos y las reglas para combinarlos, es decir, los sistemas de numeración, son productos culturales. A lo largo de la historia, distintos pueblos han producido sistemas de numeración con diferentes símbolos y reglas. Entre ellos, el sistema de numeración decimal se estudia desde el inicio de la escolaridad para representar, primero, los números naturales y, luego, los números decimales. En consecuencia, en 6° año ya es posible reflexionar sobre sus características, comparándolo con otros sistemas.

Con respecto a los números racionales, una mirada sobre el origen de las fracciones y de los decimales, para conocer qué problemas permitieron resolver y cómo aparecieron sus representaciones numéricas, nos permitirá focalizar las decisiones didácticas tomadas al proponer las actividades para el aula.

Las fracciones de numerador 1 ya se conocían en la antigüedad. El problema de expresar las partes de un todo y la necesidad de medir cantidades continuas constituyeron para los antiguos egipcios el motor de la invención de las fracciones, dado que los números naturales resultaban insuficientes. Posteriormente, cuando se descubrió que al operar con ellos se cumplían las mismas propiedades que en las operaciones con enteros, los matemáticos las consideraron números.

Cuando se descubrieron las fracciones llamadas decimales, se advirtió poco a poco que se podía utilizar la numeración de posición para expresar cantidades menores que la unidad, introduciendo la coma para separar la parte entera de la decimal. Esto permitió expresar esas fracciones sin dificultad y los enteros aparecieron como fracciones particulares: aquellas cuya representación no lleva ninguna cifra después de la coma. Casi a fines del siglo XVI, Simón Stevin publica el primer libro de la historia que trata únicamente de los números decimales: La Disme, que significa la décima. Esta obra, dirigida a todos los lectores de la época que utilizaban números, como astrólogos, agrimensores y comerciantes, tuvo como propósito mostrar que los cálculos y las medidas pueden simplificarse considerablemente con la utilización de los decimales. Para expresar cantidades menores que la unidad, Stevin propone fraccionar la unidad en décimas, centésimas, milésimas, adoptando un criterio de posición, en lugar de usar los denominadores para indicar las partes de la unidad. En consecuencia, cuando hablamos de números decimales, nos referimos a los racionales, para los cuales se puede encontrar una fracción decimal representante, cuyo denominador es una potencia de 10. De esta manera, es posible utilizar un sistema de representación decimal posicional, que sea equivalente al sistema definido para los números naturales.

El interés por la representación decimal de las fracciones decimales se debe a la posibilidad que ofrece esta forma de escritura de utilizar los algoritmos de cálculo definidos para los naturales. Los números decimales se han convertido en protagonistas de todos los cálculos debido a la disponibilidad creciente del uso de las calculadoras.

En este sentido, uno de los propósitos de la enseñanza de las fracciones y los decimales es que los estudiantes reconozcan ambos sistemas numéricos de notación como modos de representar los mismos conceptos, y que puedan determinar cuál es el que tiene ventajas en la utilización, según la situación. Efectivamente, aunque los numerales 0,75 y $\frac{3}{4}$ representan la misma cantidad, en algunos contextos es más fácil pensar en $\frac{3}{4}$ y en otros es más adecuada la expresión decimal.

Además, en relación con los problemas que permiten resolver las fracciones y los decimales, presentaremos algunos problemas de contexto extramatemático[4], donde se deben expresar las partes de un todo y medir cantidades continuas, como se planteó en el origen de estos números, y otros problemas de contexto intramatemático que incluirán también la representación de los números como puntos en la recta numérica.

En cuanto al establecimiento de relaciones de orden entre fracciones y decimales, deberemos precisar cuáles son los criterios que permiten determinar este orden cuando se comparan distintos tipos de escrituras, pues para los niños que intentan conservar y extender los conocimientos adquiridos en relación con los números naturales, no es fácil advertir que 0,0867 no es mayor que 1,2 aunque tiene más cifras. O bien que $\frac{4}{5}$ no es el siguiente de $\frac{3}{5}$, y esta situación se complica aún más cuando se trata de comparar 1,5 y $\frac{1}{5}$. La idea de que no hay un racional que sea "el siguiente" de otro dado, supone un salto en la manera de pensar y usar los números.

[6] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Los contextos", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

La comprensión de los números racionales implica disponer de diversas nociones relacionadas: fracciones, razones, decimales como así también una rica y compleja variedad de situaciones de uso y formas de representación. Asimismo, su comprensión implica concebir los números naturales como parte de los racionales y, para ello, debemos saber qué ideas de las conocidas para los naturales pueden extenderse al nuevo campo numérico y cuáles pueden modificarse. Para que los alumnos adquieran estos conocimientos, es importante proponer situaciones[7] que permitan a los alumnos explorar, ensayar, buscar nuevas estrategias y argumentos para validar su propio trabajo, con el propósito de que vayan logrando cada vez un trabajo más autónomo.

Plantear situaciones para comparar cantidades y números

En *Cuadernos para el aula: Matemática 5*, se han presentado situaciones para explorar y explicitar los límites de utilización de diferentes criterios de comparación de fracciones y de fracciones con números naturales, cuando éstas se representan en forma numérica. Asimismo, se ha explicitado cómo comparar dos racionales, cuando uno está representado como fracción y el otro como decimal.

En 6° año/grado, es interesante que las actividades para comparar cantidades (expresadas con un número y la unidad correspondiente) y números incluyan tanto las comparaciones de fracciones entre sí y con los números naturales como las de números decimales entre sí y con los números naturales, como así también aquellas que implican comparar fracciones con números decimales y naturales. En todos los casos, esas actividades estarán orientadas a que los alumnos elaboren sus propias estrategias y propiciarán el planteo de distintas tareas, como ordenar fracciones o números decimales, ubicar fracciones o decimales entre naturales o intercalar una fracción entre otras dadas, o un decimal entre otros dados.

Una situación como la siguiente, ya planteada en años anteriores, puede provocar una discusión interesante acerca de las estrategias propias de comparación de números decimales que utilizan los alumnos.

• Colocá el signo mayor, menor o igual según corresponda.
0,2 0,12
1,20 1,050
2,324 5,54

[7] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Las situaciones de enseñanza", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

Al corregir esta actividad en forma conjunta, es conveniente detenernos solo en los resultados que no coinciden. En estos casos, promoveremos que, en sus argumentaciones, los alumnos utilicen la ubicación en la recta numérica o se valgan de la posicionalidad de las cifras (décimas, centésimas, etc).

Algunos chicos cometen errores cuando trasladan propiedades de los números naturales a los números decimales. Por esto, es conveniente que al elegir los pares de números a comparar, incluyamos aquellos que pueden poner en evidencia algunos de estos errores[8].

Para avanzar en la comprensión de los números decimales, podríamos presentar situaciones que promuevan el análisis y la reflexión de los conceptos a partir de la problematización de estos errores. Por ejemplo:

• Un grupo de alumnos resolvió la actividad anterior, dando diferentes argumentos para cada caso. Estos son dos argumentos. Analizalos y respondé.
a) Ana dice que *0,2 es menor que 0,12 porque 2 es menor que 12.*
¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?
b) Pedro y María no están de acuerdo en sus respuestas. Pedro quiere convencer a María de que 1,20 es menor que 1,050.
¿Cuál creés que pudo ser el argumento que utilizó Pedro para convencer a María? ¿Quién creés que tiene razón?

• ¿Estás de acuerdo con alguna de las siguientes argumentaciones? ¿por qué?
a) Dos coma trescientos veinticuatro es mayor que cinco coma cincuenta y cuatro porque tiene más cifras.
b) El número 2,324 es menor que 5,54 porque la parte entera 2 es menor que 5.
c) 2,324 es mayor que 5,54, porque el 324 es mayor que el 54.

En la puesta en común de una actividad como la anterior, el docente podrá orientar la discusión hacia cuáles son las estrategias válidas para comparar números decimales y cuál es la utilidad de pensar en la equivalencia de números decimales.

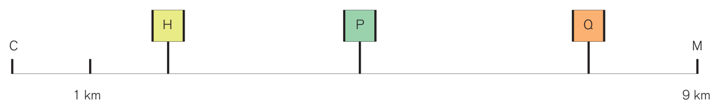
Otro recurso que resulta útil para comparar fracciones, y también para determinar entre qué números naturales se encuentra una fracción y para encontrar fracciones entre dos dadas, es la recta numérica. Sin embargo, es necesario

[8] **Recomendación de lectura:** Panizza, M. (1997), "Aproximación al análisis del error desde una concepción constructivista del aprendizaje", en: Bressan, A. M. y otros (1997), *Los CBC y la Matemática,* Buenos Aires, AZ.

reconocer la dificultad que supone para los alumnos comprender este tipo de representación[9]. La comprensión de la noción de recta numérica implica que los alumnos construyan la idea de que un punto representa un número, y que ese número representa, a la vez, la distancia al cero en la escala elegida, o bien la diferencia entre ese número y cero. Por otro lado, tienen que ir aceptando la idea de que a un número le corresponden diferentes escrituras y más tarde tendrán que llegar a la generalización de que los números racionales equivalentes tienen la misma ubicación en la recta numérica. Una ventaja de la representación lineal es que las fracciones comienzan a "rellenar" los huecos dejados por los números naturales en la recta numérica.

Dada la complejidad del trabajo con esta representación, posiblemente resulte beneficioso comenzar con situaciones de contexto extramatemático, para luego presentar otras de contexto intramatemático. Los siguientes[10] podrían ser ejemplos del primer tipo de situaciones:

• En este dibujo se ha representado una ruta que va desde la ciudad C hasta la ciudad M. A lo largo del camino, se han colocado carteles indicadores de la distancia del cartel hasta la ciudad C.



¿Qué deberían decir los carteles ubicados en los puntos señalados?

• En este caso, está representada la ruta entre la ciudad T y la ciudad A. Teniendo en cuenta el cartel que indica 1 km, ubicá los carteles que indiquen:
a) la ciudad B, que se encuentra a $1\frac{2}{3}$ km de T.
b) la ciudad G, que se halla a $2\frac{1}{6}$ km de T.

T A

1 km

[9] **Recomendación de lectura:** bajo el título "Juego de la tele", en la página 42 del *Cuadernos para el aula: Matemática 4,* se analiza el uso de la recta numérica como recurso para el encuadramiento de números naturales. Este constituye un antecedente útil que se puede retomar a propósito del encuadramiento de números racionales.

[10] **Recomendación de lectura:** estas situaciones son tomadas o adaptadas de las que se incluyen en Sadovsky, P. (coord.); Lamela, C.; Carrasco, D. (2005), Matemática. *Fracciones y Números decimales. 6° grado. Apuntes para la enseñanza.* Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de currícula.

El contexto de la ruta y la referencia de 1 km permitirá a los alumnos pensar en la ubicación de los carteles en kilómetros enteros y fracciones de los mismos, a partir de la representación gráfica.

En el contexto intramatemático, los conocimientos que es necesario invertir para establecer cuál es el número correspondiente a una cierta posición en la recta pueden ser muy diversos y, como ocurre en otras situaciones, dependen de la información que se dé y de la que se pide. Por ejemplo, en las siguientes situaciones, donde hay que averiguar a qué números corresponden las siguientes letras.

- Encontrá los números "escondidos" en la recta numérica que sigue:

En este caso, dado que la unidad está representada en la recta, la ubicación de los "números escondidos" es bastante directa, ya que la división más pequeña representa $\frac{1}{5}$ y está explicitada en la recta. Puede ser que, para descubrir el número que está escondido en A, los niños cuenten de quinto en quinto y así lleguen a asignarle a A el valor de $\frac{4}{5}$. Luego, es probable que le asignen a B $\frac{7}{5}$ y que al pasar por la unidad, la nombren $\frac{5}{5}$ llegando al valor de C como $\frac{10}{5}$, que es equivalente a 2 enteros. En esta estrategia es importante la discusión que podamos impulsar respecto de las fracciones que se corresponden con los números naturales, como $\frac{5}{5}$ y $\frac{10}{5}$. Otros alumnos pueden considerar que la unidad se corresponde con $\frac{5}{5}$, entonces retrocederán un quinto para llegar a $\frac{4}{5}$ y avanzarán para llegar a $\frac{7}{5}$, y luego al $\frac{10}{5}$ ó 2. En estos casos, es importante en la discusión establecer relaciones entre cada número natural con su expresión fraccionaria equivalente.

De igual forma, es posible que para descubrir C trasladen el segmento unitario y encuentren que C es 2, sin que piensen en el 2 como $\frac{10}{5}$ o que digan que B es 1 más $\frac{2}{5}$ o que A es 1 menos $\frac{1}{5}$. En este último caso, podremos intervenir recuperando los conceptos de fracciones menores y mayores que la unidad, y analizar la expresión mixta de las fracciones mayores que la unidad ($1\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{5}$).

Cuando los alumnos formulen sus estrategias, es posible que muchas de ellas se combinen, pero la riqueza de la actividad estará dada por la discusión que el maestro puede plantear respecto de los contenidos que se fueron utilizando: conteo de fracciones de igual denominador, expresiones fraccionarias que representan enteros, expresión mixta de un número fraccionario, inclusión de la naturales en los números fraccionarios, etc.

Para complejizar la actividad, podríamos proponer a los alumnos que encuentren un número que está escondido en la mitad, en la cuarta parte de A y 1, y avanzar en la idea que entre dos puede haber otros.

• Observá esta recta y encuentrá los números escondidos en A y en B.

En este ejemplo, el hecho de que la unidad no esté dividida en parte iguales hace que la actividad sea más compleja (entre 0 y 1 está dividida en sextos y entre uno y dos está dividida en cuartos. Además, no están presentes todas las divisiones en cada unidad.

Para encontrar el número escondido en A, es necesario descubrir la parte que representa de la unidad, es decir la menor división que se explicitó en el intervalo (0,1), que es $\frac{1}{6}$. De igual manera, para B, en el intervalo (1; 2), hay que encontrar el valor de la parte en la que se dividió el entero. En estos casos, se juegan relaciones que pueden ser expresadas como la tercera parte de *la mitad es* $\frac{1}{6}$ *y la mitad de la mitad es un cuarto.*

Para encontrar el número escondido en B, puede ser que lo descubran contando de mitad en mitad hasta llegar a $\frac{3}{2}$, o bien contando de $\frac{3}{6}$ en $\frac{3}{6}$ hasta llegar a $\frac{9}{6}$, lo que permitirá discutir sobre estas equivalencias. Puede ser que reconozcan que este intervalo (1; 2) está dividido en cuartos y que piensen en el 1 como cuatro cuartos, y que luego cuenten para llegar a $\frac{6}{4}$ o que vean al dos como $\frac{8}{4}$ y que retrocedan para llegar a $\frac{6}{4}$.

En el momento de la confrontación, podremos proponer situaciones simuladas que permitan discutir otras relaciones a partir de la situación anterior. Por ejemplo:

• ¿Qué opinás acerca de lo que dicen Juan y Pedro? Justificá tu respuesta.
a) Pedro dice que en A está escondido $\frac{1}{3}$.
b) Juan dice que entre $\frac{1}{2}$ y 1 se puede ubicar $\frac{3}{4}$.

En el primer caso, se pretende que los alumnos busquen justificaciones utilizando equivalencias de fracciones o que procedan trasladando el segmento OA y así descubran que está contenido 3 veces en (0; 1) y puedan ver, en la recta, que a la tercera parte de la mitad le corresponde el mismo lugar en la recta que a la sexta parte de un entero. En el segundo caso, nuevamente, se juega la idea de intercalar una fracción entre otros dos números, pero se complejiza, porque esa unidad ya está dividida en sextos. Si bien los alumnos pueden estar pensando en la mitad del intervalo ($\frac{1}{2}$; 1), hay que hacer jugar la relación mitad de mitad. Puede ocurrir que vean el 1 como $\frac{4}{4}$ y retrocedan un cuarto para decir que hay tres cuartos o que superpongan las divisiones de la primera mitad del segmento (tercios) a la división en cuartos.

Estas son otras actividades que podemos proponer para trabajar con la recta numérica.

- ¿Dónde está el 0?

- ¿Dónde está el 1?

En la primera actividad, se propone que a partir de la información disponible logren indicar donde está el 0. Si bien en este caso se presentan fracciones de igual denominador, podrían variarse utilizando $\frac{2}{3}$ y $\frac{9}{6}$ ó $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{2}$ o combinar expresiones fraccionarias y decimales. Otra posibilidad es brindar como información solo la ubicación de las dos fracciones, quedando a cargo de los chicos la ubicación de la unidad para luego indicar donde está ubicado el 0.

En la segunda actividad, el problema está centrado en poder establecer que el segmento del intervalo dado debe dividirse en ocho partes, y que cada parte representa $\frac{1}{5}$ de la unidad que no está marcada. En este caso, el numerador estaría informando que ese segmento contiene 8 de esas partes (quintos), que es necesario encontrar para identificar la unidad.

También podremos proponer que encuentren el cero y el uno, dando dos fracciones de igual denominador o de diferente denominador: por ejemplo, entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{4}$ o entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$. De manera similar, se podría proponer la misma actividad trabajando con fracciones lejanas a la unidad, como $\frac{27}{4}$ y $\frac{29}{4}$ y pedir a los alumnos que encuentren los dos enteros más próximos al número. Como puede observarse, para resolver estas actividades los alumnos usarán distintos procedimientos según la información disponible en cada caso.

Otra propuesta interesante para trabajar con la recta numérica es el siguiente juego:

“Un mensaje para cada punto”: ubicar puntos en la recta numérica
Materiales: cada equipo debe recibir dos hojas lisas, una en blanco para escribir el mensaje y otra con dos rectas numéricas graficadas en las que aparecen marcados los puntos 0 y 1 (a 12 cm de distancia) y un punto M o P, incluido en dicho intervalo. Es importante que estos números representen fracciones conocidas.
Organización de la clase: se dividirá en un número par de equipos, integrados por 2 ó 3 alumnos. Cada equipo desempeñará los roles de emisor y receptor, ya que debe enviar un mensaje y recibir otro.
Desarrollo: a la mitad de los grupos se le entrega la representación de una recta numérica, donde se ha marcado el punto M. Y a la otra mitad se le entrega la representación de una recta numérica donde se ha marcado el punto P.
Pediremos a los alumnos que, en unos pocos minutos, escriban un mensaje para que el otro grupo pueda marcar el punto que le indicarán, en el mismo lugar. Dicho mensaje no puede incluir dibujos.
Cuando todos los alumnos terminan de escribir el mensaje, se lo entregan al grupo receptor, quien tiene que marcar el punto M o el P.
Luego, los alumnos analizan si los puntos marcados por los equipos receptores coinciden con los que tienen marcados los equipos emisores en sus respectivas rectas. En caso de que no haya coincidencia, emisores y receptores discutirán si la causa está en la interpretación del mensaje o en la fracción explicitada en el mensaje.

A continuación, organizaremos una puesta en común en la que recuperaremos los mensajes o soluciones al problema que consideremos más ricos para la discusión.

En aquellos casos en que hubo errores en los mensajes o en la interpretación, sería interesante que los pongamos a consideración de la clase, para realizar un análisis que permita establecer alguna conclusión con respecto a las estrategias que conviene utilizar para decir qué fracción está representada en el punto indicado (M ó P). Por último, propondremos que analicen los mensajes que fueron bien elaborados por los emisores e interpretados por los receptores, ya que permitieron marcar el punto en el mismo lugar.

Un tipo de actividad en la que los chicos pueden invertir la representación de fracciones en la recta es la de comparar fracciones entre sí y con números naturales. En estas actividades también convendrá recuperar los procedimientos de comparación conocidos desde el año anterior. Para ello, podremos proponer la comparación en forma abierta, con el fin de que los alumnos decidan, entre los diferentes recursos de que disponen, cuál utilizar en función de los números involucrados. Así, es posible proponer una actividad como la siguiente.

• Decidí cuál es la fracción menor en los siguientes pares de fracciones.

$\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$	$\frac{10}{8}$ y $\frac{6}{4}$	$\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{12}$
$\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{7}$	$\frac{5}{11}$ y $\frac{6}{13}$	$\frac{6}{10}$ y $\frac{5}{7}$

En la puesta en común, será oportuno retomar los diferentes recursos de comparación utilizados en cada caso (representar en la recta, ubicar las fracciones entre los dos enteros más próximos y entre el entero y el medio más próximo, transformar en fracciones equivalentes de igual numerador o igual denominador) y discutir la conveniencia de su uso en función de los números involucrados[11].

Plantear situaciones para analizar distintas escrituras de un número

Uno de los propósitos de la enseñanza de las fracciones y de los números decimales es que los alumnos reconozcan que ambos tipos de escritura son formas diferentes de representar los mismos números. Es necesario que, en la enseñanza de los decimales, se incluyan experiencias que lleven a los alumnos a establecer relaciones o conexiones entre los dos sistemas. Por ejemplo, si los chicos ya reconocen que 0,75 y $\frac{3}{4}$ representan la misma cantidad, a la hora de comparar $\frac{3}{4}$ con otros números decimales como 0,743 ó 0,8, pueden pensarlo como 0,75 y valerse, entonces, de esta relación para determinar que 0,743 es menor que 0,75 y que 0,8 es mayor.

El significado que el alumno da a un número se enriquece progresivamente a medida que aumenta la cantidad de situaciones en que ese número tiene sentido para él. Por ejemplo, el 0,1 puede surgir en el contexto de la medida para materializar la décima parte del metro, para representar el resultado de repartir 1 entre 10, para aproximar el valor de una medida dividiendo una unidad cualquiera en 10 partes iguales, para escribir números menores que 1 al extender el sistema de numeración, etc. Es importante que el alumno comprenda que el objeto matemático (el número 0,1) es el mismo en todas las situaciones. En consecuencia, desde el trabajo del aula, es necesario que dediquemos especial atención a presentar actividades que den lugar a que los niños conozcan los distintos significados de cada una de las representaciones utilizadas para los números racionales.

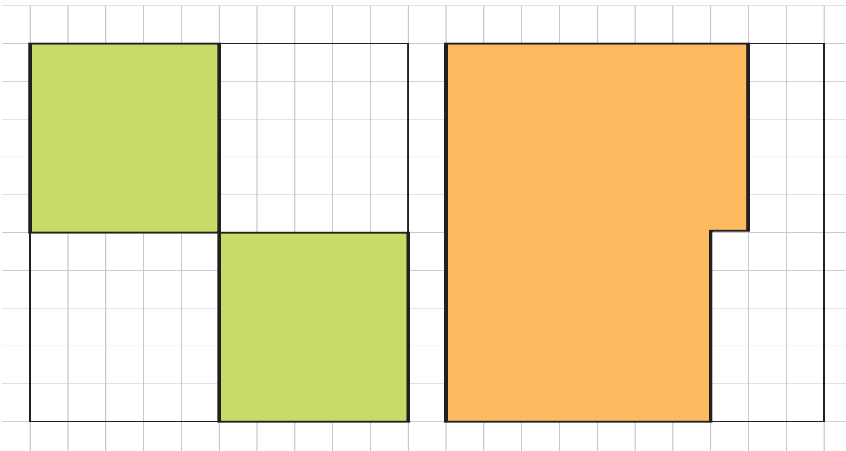
[11] Si bien todas estas actividades se presentaron con expresiones fraccionarias, las mismas pueden proponerse con escrituras decimales o combinando ambas representaciones.

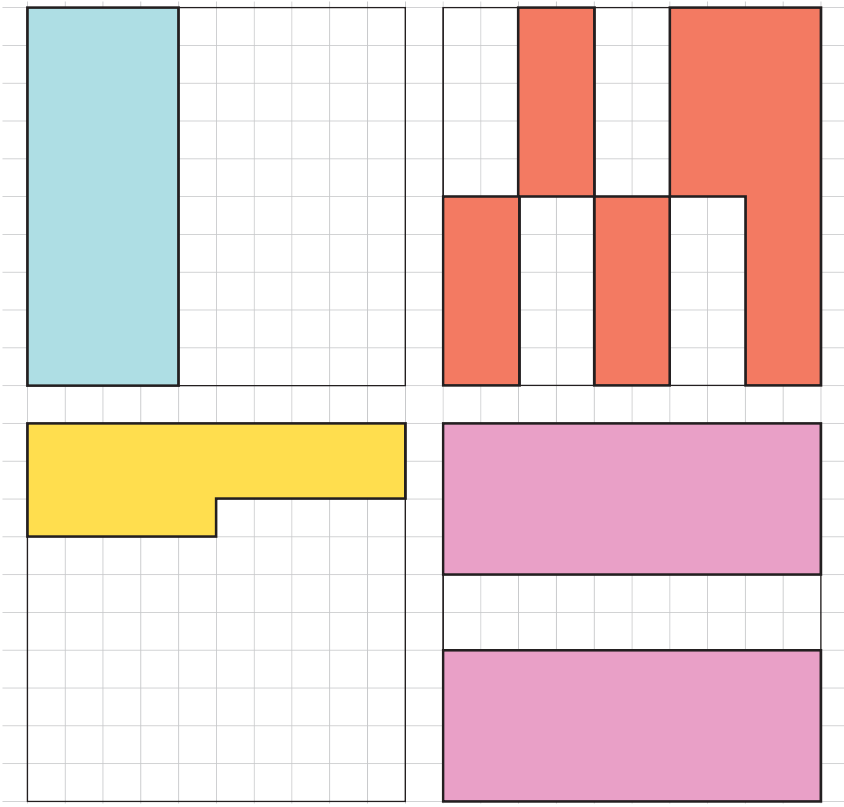
Los modos de representación son instrumentos para construir comprensión, comunicar información y trabajar con ella. La utilización de diferentes modos de representación para comunicar las ideas matemáticas y saber transformar una en otra, permite que los niños aprendan a elegir formas alternativas de representar sus ideas y poder decidir acerca de la validez de las representaciones utilizadas por sus compañeros.

Para comprender la relación entre los dos sistemas de representación, la fraccional y la decimal, es conveniente que las actividades favorezcan la traducción entre ambos. Por ejemplo, si los niños reconocen que $\frac{1}{2}$ es la misma cantidad que 0,5 pueden utilizar esta relación para saber que 0,4 ó 0,45 es un poco menos que $\frac{1}{2}$ y que 0,6 es un poco más que $\frac{1}{2}$. Las actividades se centrarán en instalar y favorecer en los niños la significación que dan a los símbolos en las escrituras y demás representaciones que utilizan.

Para favorecer el dominio de las diferentes formas de representación, es posible proponer un juego como el que sigue.

"¿Qué parte?": establecer relaciones entre distintas representaciones de un número.
Materiales: papel para escribir mensajes y cuadrados de papel cuadriculado de 10 x 10.
Organización de la clase: equipos integrados por 2 ó 3 alumnos, que actuarán como emisores primero y como receptores luego.
Desarrollo: el docente entrega a cada equipo una tarjeta distinta con la representación gráfica de una fracción. Por ejemplo:





Cada equipo tiene que escribir un mensaje con la expresión fraccionaria que corresponda a la representación que recibió. Cuando todos los equipos terminan de escribir el mensaje, cada uno lo entrega a otro, para que la represente nuevamente en forma gráfica y, además, escriba la expresión decimal.
Luego, analizan entre los equipos si la representación gráfica realizada por el equipo receptor es la misma o es equivalente a la que recibió el equipo emisor al inicio de la jugada. En caso de error, emisores y receptores, discutirán si la causa está en la escritura fraccionaria del mensaje emitido o en la representación gráfica de los receptores. Además, podrán discutir si la escritura decimal es la “traducción” de la fraccionaria.

En una puesta en común, los grupos expondrán las diferentes representaciones que obtuvieron de un mismo número. Si hubiera errores, propondremos el análisis necesario para que los alumnos los descubran. Es importante que los momentos de confrontación permitan que los niños vayan avanzando en sus concepciones.

Se puede jugar varias veces con distintas variantes, cambiando la representación del número elegido en la tarjeta que se entrega, en lugar de gráficos incluir escrituras fraccionarias, o se pueden proponer también escrituras decimales o expresiones coloquiales. En estos casos, habrá que cambiar en la consigna la forma de representación que se usa para escribir en el mensaje, como así también la que usarán los receptores al "traducir".

Luego, como siempre después de un juego, conviene que propongamos situaciones simuladas que permitan a los niños seguir enfrentando problemas dentro de un contexto que conocen, en el que ya actuaron y que funciona con reglas de las que ya se apropiaron. Un ejemplo es el siguiente.

> • Cuando la maestra preguntó qué habían representado en la cuadrícula, los chicos de un grupo discutían así:
> Tomás dijo: *–Yo representé una décima.*
> Javier, rápidamente aclaró: *–Yo pinté el 10 %*[12].
> Mayra expresó: *–Yo pienso igual que Tomás, pinté 0,1 (cero coma uno).*
> Sofía afirmó: *–A mí me parece que se trata de 0,10.*
> Antonio dijo: *–Yo, en cambio, pienso que la representación corresponde a* $\frac{2}{20}$.
> Discutí con tu grupo quién o quiénes tienen razón. Justifiquen sus respuesta.

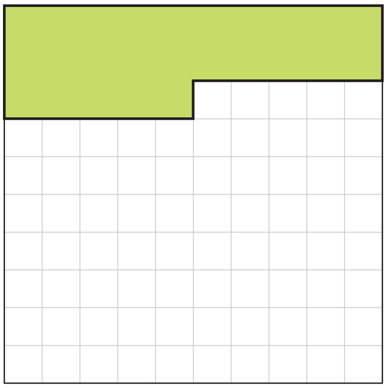
En la puesta en común que seguirá a esta actividad, sería interesante establecer discusiones acerca de que es posible representar un mismo número con diferentes escrituras, así como la equivalencia entre las expresiones y alguna de las representaciones gráficas asociadas, por ejemplo los décimos se pueden ver en el gráfico como la tirita de diez cuadraditos o cada veinteavo como una tirita de cinco cuadraditos, etc. El material puede resultar útil, como soporte, para justificar las argumentaciones de los alumnos y reflexionar sobre los errores frecuentes. Por ejemplo, si un alumno piensa que 0,10 es diferente a 0,1 porque no tiene en cuenta la estructura global de la expresión numérica y considera las cifras decimales como si fueran números naturales, la representación con material le permitirá comprobar la equivalencia.

Otro tipo de situaciones que favorecería que los alumnos comiencen a interpretar y dar significado a las diferentes representaciones y escrituras de cantidades podrían ser:

---

[12] Es habitual que en el desarrollo de los contenidos de 6º año/grado se aborden primero los números racionales y, luego, la proporcionalidad incluyendo el porcentaje como un caso específico de proporcionalidad. Por tanto, la relación con el porcentaje surgirá en la medida que se haya trabajado el concepto previamente. El docente evaluará si adaptar esta actividad o presentarla en el momento oportuno tal como está.

• Completá, en cada caso, el espacio en blanco para que cada escritura corresponda al siguiente gráfico:



$\frac{\dots}{4}$ $\qquad$ $\frac{\dots}{1000}$ $\qquad$ $\frac{\dots}{20}$

veinticinco... $\qquad$ 0, 2.... $\qquad$ ..5 %

• Controlá tus respuestas con un compañero. En los casos en los que no coincidan, discutan hasta llegar a un acuerdo.

En estos casos, es posible cambiar la cantidad y la forma de la parte sombreada, (siempre sobre la cuadrícula de 10 x 10 como soporte), para que los niños tengan que cambiar las justificaciones, ampliando el significado de la cantidad representada.

También puede resultar interesante, para que los niños avancen en la construcción de argumentos, que incorporemos otras fracciones, como por ejemplo $\frac{3}{12}$, o cambiar la cuadrícula por otra, por ejemplo de 4 x 4 (cuadrada o rectangular), esto les exigiría tener que explicar cómo hacer para ver los doceavos, las centésimas, etc., utilizando las equivalencias entre las expresiones numéricas. Lo mismo sucederá si incorporamos gráficos circulares.

Cuando los alumnos han realizado este tipo de actividades, es sumamente valioso el momento de la puesta en común en la que se comunican los significados atribuidos a las representaciones y el docente plantea la discusión para que los alumnos avancen en la construcción de argumentos propios.

En este sentido, es importante tener en cuenta que para que los dibujos lleguen a ser representaciones, los alumnos deben darles significado. Por otra parte, las representaciones no deben ser enseñadas como un fin en sí mismo, sino como una herramienta para construir la comprensión y comunicar información. La construcción e interpretación de representaciones son dos actividades que apoyan los procesos de comunicación y la construcción de imágenes (representaciones internas). Comprender una representación incluye conocer que puede haber diferentes interpretaciones asociadas.

Para llevar a los chicos a pensar en las diferentes formas de escribir un número a partir de su expresión oral, es posible presentar situaciones simuladas como la siguiente, en la que el análisis los llevará a validar soluciones correctas e identificar escrituras incorrectas de un número.

• La señorita dictó una serie de números. Entre otros números, dijo: *doscientos dos centésimos.* Aquí aparecen algunas de las escrituras que hicieron los chicos para ese número. Decidí cuáles son correctas y justificá tu respuesta.

2,02 202,100 $\frac{202}{100}$ 0,202

En este tipo de situaciones, es muy interesante la reflexión que se puede plantear luego del análisis individual o de los grupos pequeños acerca del significado de los centésimos y su relación con los décimos, los milésimos o la unidad, que se pone de manifiesto al escribir un número decimal. Además, resultará valioso que los alumnos formulen sus propias estrategias para escribir números a partir del dictado. Para favorecer el dominio de las relaciones de equivalencia entre las diferentes escrituras, es posible proponer juegos[13] como el siguiente.

"Memotest de fracciones y decimales": relacionar escrituras equivalentes
Materiales: un mazo de 36 cartas con distintas escrituras numéricas, como las que aparecen a continuación, lápiz y papel para anotar el puntaje.

[13] **Recomendación de lectura:** para encontrar otras propuestas de juegos, se sugiere consultar Chemello, G. (coord.), Hanfling, M. y Machiunas, V. (2001), *El juego como recurso para aprender. Juegos en Matemática EGB 2* (Material para docentes y recortable para alumnos), Buenos Aires, Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología (también en Internet) y Fuenlabrada, I., Block, D., Balbuena H., Carvajal, A. (2000), *Juega y aprende Matemática. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

0,75	0,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{75}{100}$	0,25	$\frac{3}{4}$
0,50	0,4	$\frac{2}{20}$	0,80	0,6	$\frac{1}{4}$
0,1	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	75%	$\frac{8}{20}$	20%
40%	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	10%	$\frac{80}{100}$	$\frac{4}{5}$
50%	0,125	$\frac{2}{5}$	$\frac{60}{100}$	25%	$\frac{2}{10}$
$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{3}$	60%	0,2	$\frac{2}{6}$	80%

Organización de la clase: cuatro jugadores o dos parejas.
Desarrollo: se colocan las cartas boca abajo, de modo que formen una disposición rectangular. Por turno, cada jugador levanta dos cartas y se las muestra al resto de los integrantes del grupo. Si reconoce en esas cartas dos representaciones de un mismo número, lee en voz alta ambas tarjetas. Si los otros tres integrantes acuerdan, entonces el que levantó se lleva las cartas y se anota ese número como puntaje. Si alguien no acuerda, se

discute en el grupo para ver quién tiene razón. Si la lectura de alguna de las cartas es incorrecta, se anota la mitad del valor de la carta. Si el integrante que levantó las cartas considera que éstas no corresponden a representaciones del mismo número, las vuelve a colocar en el mismo lugar, boca abajo. En ambos casos, le toca el turno al compañero siguiente.
El juego finaliza cuando ya no quedan más fichas sobre la mesa. Para determinar quién ganó, cada jugador suma los números que anotó como puntaje. Gana el jugador que obtuvo la suma mayor.

Este juego propone a los alumnos utilizar procedimientos para que identifiquen equivalencias entre diferentes escrituras de un mismo número racional. Mientras los alumnos juegan, podremos recorrer los bancos observando las interacciones de los chicos, respondiendo dudas, pero sin sugerir o indicar los procedimientos que podrían utilizar. En caso de desacuerdo, es importante que promovamos, en los pequeños grupos, la discusión y justificación de sus afirmaciones.

Cuando todos los grupos hayan terminado de jugar, organizaremos una puesta en común con el fin de que los alumnos cuenten los procedimientos que utilizaron para decidir si las dos cartas que levantaron representan el mismo número. Formularemos preguntas, recuperando alguna de las discusiones que hayamos escuchado al recorrer los grupos. Es importante que conozcamos los procedimientos que usaron los chicos antes de la puesta en común, porque a partir de sus producciones podremos hacerlos avanzar en sus conocimientos.

Una discusión interesante que podríamos plantear es cuáles fueron las escrituras usadas para anotar los puntajes de cada jugador. Probablemente, en la primera partida, aparecerán las distintas representaciones, lo que hace difícil la suma. Por otro lado, es posible reflexionar respecto de cuál de las representaciones facilita la suma. Por tanto, en nuevas partidas, los alumnos optarán por hacer la conversión a medida que van registrando. Luego de la situación de juego, sería interesante simular situaciones donde se problematicen cuestiones que lleven a la reflexión acerca de los conocimientos puestos en juego. Por ejemplo:

• ¿Qué cartas pudo haber levantado Juan para llevarse ambas, si la primera que dio vuelta es ésta $\frac{1}{8}$?

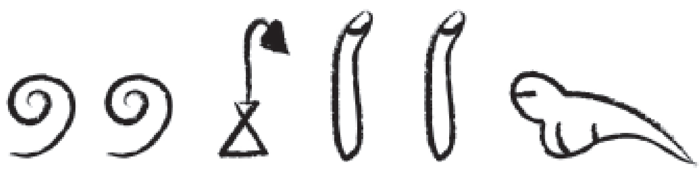
• María levantó dos tarjetas cuyas escrituras eran: $\frac{1}{5}$ y 20%, y se las lleva, porque dice que son equivalentes. Juan estuvo en desacuerdo.
¿Quién tiene razón? Explica por qué.

• La maestra les pidió que dibujen tres cartas diferentes de las que están en el juego que representen 0,8. ¿Cuáles pudieron haber dibujado?

Con respecto a los números naturales, es necesario que los chicos puedan comparar diferentes escrituras pues esto contribuye, como ocurre con todos los objetos matemáticos, a diferenciar determinado número natural y sus representaciones, y también a reconocer la idea de que un sistema de numeración implica la elección de una forma particular de representación con símbolos y reglas que le son propias.

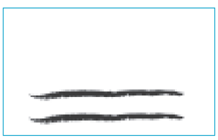
Para ello, es posible incluir el estudio de otros sistemas de numeración, con otros símbolos y otras reglas, como por ejemplo el sistema romano de numeración, cuya enseñanza es parte de la tradición escolar y que tiene como interés particular que su presencia aún persiste en el uso para numerar siglos, relojes y volúmenes de colecciones de libros.

Sin embargo, desde el punto de vista de la caracterización del sistema decimal, es más interesante su comparación con un sistema como el egipcio, que tiene otros símbolos y otras reglas de combinación entre ellos. Para escribir un número, es necesario considerar la suma de los valores de cada símbolo y saber que se puede repetir hasta 9 veces, puesto que al tener 10 símbolos iguales, se sustituyen por otro que los representa. Este es un sistema aditivo y decimal, y dado que el valor de los símbolos no depende de la posición, el cero no se necesita. Por ejemplo, 121.200 se escribe

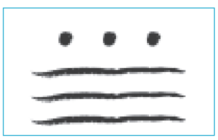


100 + 100 + 1.000 + 10.000 + 10.000 + 100.000

También es interesante comparar nuestro sistema con otro sistema posicional, pero con símbolos y base diferentes al nuestro, por ejemplo el sistema maya. En este sistema, se empleaban tres símbolos básicos: el punto representaba una unidad, la raya representaba cinco unidades y una concha representaba el cero.

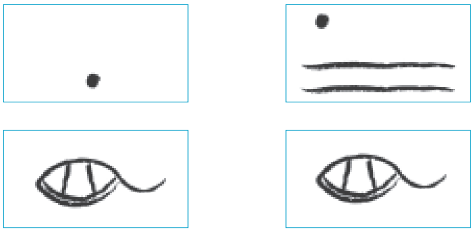


10



18

Las cifras (puntos y rayas) se escriben por niveles, colocados verticalmente, y en el nivel superior cada símbolo tiene un valor 20 veces mayor. Por ejemplo,



20 220

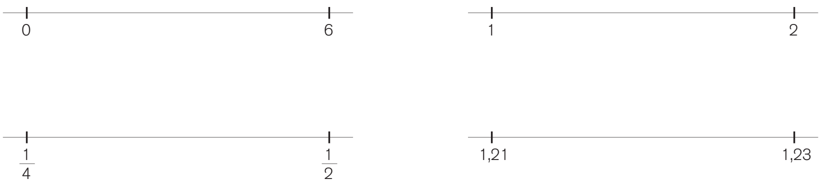
El objetivo del trabajo con otros sistemas no se vincula con transformar a los alumnos en “escritores de números en otros sistemas”, sino que apunta a reflexionar sobre las semejanzas y diferencias entre los sistemas ¿cuántos símbolos utiliza?, ¿de a cuántos se agrupan los elementos?, ¿tienen el cero?, si se cambian las cifras de lugar ¿cambia el número?, ¿hay alguna relación entre la cantidad de cifras y el tamaño del número? o, lo que es lo mismo, ¿es cierto que *a mayor cantidad de cifras el número es más grande*?

Plantear situaciones para analizar relaciones y propiedades de los números

Luego de realizar actividades de ubicación de puntos en la recta numérica como los propuestos en el apartado “Plantear situaciones para comparar cantidades y números”, es posible plantear problemas que den lugar a discutir una diferencia fundamental entre los números naturales y los números racionales. Mientras que para los naturales se puede encontrar siempre el número siguiente, para los racionales esta relación no existe, pues siempre es posible encontrar un nuevo número racional entre otros dos que se elijan.

Para comenzar a discutir con los chicos esta cuestión, podremos comenzar proponiendo una actividad de intercalación de números en la recta, como la siguiente.

• En cada recta numérica, intercalá cinco números entre los números indicados.



Los números propuestos se han elegido para que los alumnos empleen diferentes estrategias para encontrar números que pueden intercalarse entre los dos dados. Para el primer ejemplo, puede ocurrir que en las respuestas sólo aparezcan números naturales, pero ya el segundo par de números los obliga a pensar en fracciones o decimales.

En el caso de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, es posible que las transformen en fracciones equivalentes de denominador cuatro ($\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$), que las expresen como fracciones decimales ($\frac{25}{100}$ y $\frac{50}{100}$); o bien como expresiones decimales (0,25 y 0,50), y encuentren otras fracciones comprendidas entre esas. En el cuarto par de números, se hace necesario que piensen en las milésimas para poder justificar los números que escriban. En estos dos últimos ejemplos, la recta numérica ofrece un soporte que a veces es limitado desde el plano físico, pero que permite a los alumnos pensar en la ampliación de la longitud con que se representa el intervalo numérico, como acercando una lupa para incorporar más divisiones y como consecuencia la posibilidad de pensar en más números comprendidos entre otros dos.

Otra posibilidad es proponer actividades donde se presenten explicaciones realizadas por otra persona sobre cuál es el número siguiente para analizar, como por ejemplo:

- Ramiro dice que el siguiente de doscientos treinta y seis milésimos es doscientos treinta y siete milésimos. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

Es importante que en la puesta en común se plantee la discusión sobre las razones por las que se está o no de acuerdo con la explicitación de Ramiro. Esto dará lugar a reflexiones sobre el límite de esta relación en los números racionales. El límite, en este caso, está dado por cuál es la cantidad de cifras decimales de los números que se consideran; efectivamente, si se consideran sólo los números decimales que tienen hasta tres cifras decimales, entonces 0,237 es el siguiente de 0,236. Esta cuestión se vincula con las propiedades de "discretitud" para el conjunto de los números naturales y "densidad" para el conjunto de los números racionales.

También habrá que discutir sobre las relaciones entre los números naturales y los números racionales, por ejemplo, planteando cuestiones como la siguiente.

- Guillermo dice que un número natural siempre se puede escribir como una fracción y también como un número decimal. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

- Gabriela se pregunta si al revés es cierto. ¿Qué le contestarías?

En la puesta en común[14] es importante que los chicos, además de dar ejemplos de números naturales escritos como fracción y como decimal, y de responder a las preguntas del docente respecto de otros ejemplos con números alejados de los de los ejemplos que aparecieron, expliciten las razones por las que piensan que Guillermo tiene razón. En este sentido, podrían decir, por ejemplo, que *siempre que una fracción tenga el numerador y el denominador iguales será igual a 1 y que si el numerador es múltiplo del denominador, al simplificar queda un número natural.* Con respecto a la escritura como número decimal, si bien es posible, en muchas ocasiones no tiene sentido usarla. Sin embargo, cuando se plantea un cálculo de resta entre un número natural y uno decimal, como 4 – 2,55 se suele escribir el 4 como 4,00.

Con respecto a la respuesta a la pregunta de Gabriela, además de los ejemplos de fracciones y decimales que no se pueden escribir como naturales, se puede discutir si con esos ejemplos alcanza para afirmar que no es cierto que siempre un número decimal o una fracción se puede escribir como un número natural. Es decir, comenzar a hacer circular en la clase la regla según la cual un contraejemplo alcanza para asegurar la falsedad (no es cierto) de una afirmación (siempre un número decimal o una fracción se puede escribir como un número natural). Asegurar que “siempre se cumple” es afirmar que es cierto para “todos” los números decimales y fracciones, y esto es cierto sólo en algunos casos.

Una formulación de la conclusión a la que se pretende arribar con esta actividad es que *todo número natural se puede escribir como racional, pero la inversa no es cierta.* Sin embargo, habrá que considerar que esta es una formulación general y que, en muchas ocasiones, no es planteada ni comprendida como tal por los alumnos de 6to año/grado.

Para avanzar en el uso de las operaciones con distintos tipos de números

Los alumnos irán construyendo el significado de las operaciones en la medida que tengan la oportunidad de trabajar con problemas en diferentes contextos donde las mismas cobren sentido. Al respecto, Ronald Charnay[15] plantea lo siguiente: *haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas es cómo se permitirá a los alumnos construir el sentido. Sólo después, estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas.*

---

[14] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “La gestión de la clase”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*.

[15] **Recomendación de lectura:** véase Charnay, R. (1994), “Enseñar matemática a través de la resolución de. problemas”, en Parra, C. Y Saiz, I. (comps.) (1994), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós.

En el caso de las operaciones, deberemos tener en cuenta, para cada una, distintos aspectos con el fin de dar oportunidad a los alumnos de construir su sentido. Así, los niños deberán tener conocimientos disponibles para:

- reconocer en qué situaciones esa operación es una herramienta útil para resolverla, y también reconocer sus límites, es decir reconocer en qué situaciones no es una herramienta adecuada de resolución,
- establecer relaciones entre los diferentes significados de esa operación,
- elegir las estrategias más económicas según el problema que esté resolviendo,
- decidir qué procedimiento utilizar para realizar los cálculos y
- utilizar mecanismos de control sobre los resultados.

La propuesta de trabajo con operaciones de 6to año/grado deberá contemplar los campos de problemas aditivos y multiplicativos incluyendo problemas que involucren tanto cantidades discretas (que se expresan con naturales) como continuas (que se expresan con fracciones y decimales). En principio, deberemos retomar brevemente los problemas aditivos (que se resuelven con sumas y/o restas) y centrarnos más ampliamente en la resolución de problemas del campo multiplicativo (que se resuelven con la multiplicación y división), que dan lugar a la aparición de los números racionales. Este campo incluye problemas de productos de medida, proporcionalidad, combinatoria, reparto e iteración (repetir una cantidad un cierto número de veces), así como aquellos que, fundamentalmente en contextos intramatemáticos, dan lugar a la puesta en juego de las propiedades de las operaciones y las relaciones de divisibilidad.

Los números racionales aparecen en el campo multiplicativo considerando los distintos significados de la división. Así, los problemas que incluyen magnitudes continuas en contextos de medida plantean la necesidad de incorporar fracciones y expresiones decimales. Por otra parte, la comprensión de estos números aporta a la comprensión de las operaciones aritméticas con ellos.

En cuanto a los **números racionales y sus operaciones,** es fundamental tener en cuenta que su aprendizaje supone una “ruptura” con lo que el niño sabe hasta el momento, dado que al resolver problemas con este tipo de números no siempre pueden usar los mismos procedimientos que usaban con los naturales. Por ejemplo, falla el conteo de colecciones que utilizaba con los números naturales y que está en la base de la suma y de la multiplicación con esos números, porque en este nuevo campo numérico no hay un número racional siguiente a otro dado y, además, la idea de multiplicación no está asociada a la de “veces”. Asimismo, trabajar con números grandes o con números menores que la unidad, en determinadas situaciones, hace que resulte más difícil el control sobre los resultados o la significación de los mismos. Sabemos que la multiplicación 0,5 x 2 = 1 da un resultado menor que uno de los factores (1 > 0,5 y 2 > 1) y esto pone en cuestión el sentido de la multiplicación que se construyó con los números naturales. Es decir, que la práctica y el discurso que se ponen en juego con los números racionales suponen un salto importante en la manera de pensar y usar los números, y esto origina dificultades en muchos alumnos.

Para que los chicos puedan construir **significados de las fracciones y de los números decimales,** tendrán que apoyarse en una red de conceptos que se relaciona con la reconstrucción de la unidad, la comparación de partes congruentes, el valor de posición del sistema de numeración decimal (para los décimos, centésimos, milésimos) y la correspondencia entre diferentes escrituras de un número (expresiones decimales, porcentuales, fraccionarias). Esto les dará la posibilidad de realizar apreciaciones sobre la razonabilidad de resultados al resolver problemas, generar algoritmos convencionales y relacionar fracciones y decimales con las propiedades de las operaciones.

Al trabajar en el campo de las fracciones y decimales también es preciso tener en cuenta que, para los alumnos, operar con magnitudes continuas supone una representación mental menos inmediata de la situación que operar con magnitudes discretas en el campo de los naturales. Hay magnitudes continuas que admiten una medición directa, como la longitud, la capacidad y el peso, y otras magnitudes cuyo tratamiento es más complejo, como en el caso de la superficie o de la velocidad. La superficie, si bien puede medirse directamente, también puede calcularse como el producto de dos magnitudes y la velocidad surge como el cociente entre dos magnitudes.

Con respecto a los algoritmos de las operaciones con fracciones y decimales, si bien podemos enseñar técnicas para que los alumnos logren cierta destreza en el cálculo del denominador común para sumar o restar, y multiplicar o dividir fracciones sencillas, esta forma de trabajo implica algunos riesgos. Por un lado, ninguna de las técnicas ayuda a los alumnos a pensar sobre el significado de las operaciones o por qué funcionan y, por otro lado, es posible que los alumnos pierdan rápidamente ese dominio, porque corren el riesgo de confundir u olvidar las reglas tan rápido como las aprendieron. Entonces, es primordial que los problemas permitan a los alumnos avanzar en la comprensión del tipo de situaciones, para cuya resolución son útiles determinadas operaciones. Así, irán construyendo estrategias de cálculo mental antes de llegar a la sistematización de los algoritmos[16].

[16] **Recomendación de lectura:** véase Sadovsky, P. (coord.), Broitman, C.; Itzcovich, H., Quaranta, M. E. (2001), "Acerca de los números decimales. Una secuencia posible", en el documento Aportes para el Desarrollo Curricular Matemática, GCBA (también disponible en Internet).

Plantear situaciones para operar con distintos significados y en distintos portadores

Tal como hemos dicho, el aprendizaje de los números racionales es un largo proceso que abarca varios años de escolaridad. Por eso, es importante que a medida que los alumnos avancen en este Ciclo vayamos proponiendo problemas con diferente nivel de complejidad, con el fin de poner en juego los distintos sentidos de las operaciones.

En *Cuadernos para el aula: Matemática 4°*, se proponen problemas para favorecer en los alumnos la construcción de los sentidos de la suma y de la resta de números racionales. En 5° año/grado, se avanza con situaciones que le dan sentido a la multiplicación y división de un racional por un número natural, abordando los significados de las cuatro operaciones ya presentados para los números naturales. En 6° año/grado, avanzaremos hacia las situaciones que le dan sentido a la multiplicación y división de dos números racionales.

El significado de combinatoria que funcionaba para la multiplicación de números naturales ya no se mantiene, es decir, no tiene sentido para el caso de las fracciones y de los decimales. Tampoco la idea de reparto con divisor racional. En cambio, sí tienen sentido los significados de proporcionalidad y de producto de medidas. En general, podemos decir que los problemas de combinatoria involucran magnitudes discretas y números naturales, mientras que los problemas de producto de medidas y los de proporcionalidad pueden trabajarse con magnitudes discretas o continuas y con números naturales o racionales.

Los problemas de **combinatoria**, que se vienen planteando desde el Primer Ciclo, podremos complejizarlos incluyendo algunos con más de dos variables y otros con repetición de elementos.

- Mariela está preparando una fiesta de disfraces y quiere ayudar a sus invitados a diseñar los disfraces de payasos. Si tiene cinco chaquetas, cuatro pantalones, dos pares de zapatos y tres gorros todos distintos, averiguá cuántos disfraces diferentes se pueden formar.

- ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden armar con las cifras 5, 6, 7?

El problema de los disfraces involucra cantidades discretas: multiplicando los números que expresan la cantidad de chaquetas por el número que expresa la cantidad de pantalones por el que expresa la cantidad de gorros y por el que expresa la cantidad de zapatos, da como resultado el número de disfraces posibles de armar. En este caso, es esencial considerar el papel de las representaciones gráficas como diagramas de árbol o tablas para favorecer que los alumnos reconozcan la estructura multiplicativa de este tipo de problemas y puedan recurrir al cálculo.

En el segundo problema, para armar todos los números posibles hay que considerar que los números se pueden repetir y que cada uno de ellos se puede repetir hasta cuatro veces. Aquí será interesante que promovamos la discusión con los chicos acerca de las diferentes maneras de sistematizar la búsqueda, para asegurarse de que ésta ha sido exhaustiva.

Con respecto a los problemas de **proporcionalidad directa**, los chicos vienen resolviendo algunos problemas simples desde 2º año/grado que, en los libros de texto habitualmente se presentan como "de multiplicación" o "de división". Por ejemplo, ¿cuántas pastillas hay en 36 paquetes, si en cada paquete hay 12 pastillas? Si 360 caramelos masticables se envasan en 36 paquetes, ¿cuántos caramelos masticables hay en cada uno? En una caja de 12 paquetes hay 144 caramelos, ¿cuántos caramelos hay en 30 paquetes?

Sin duda, los dos primeros problemas son más simples, dado que se resuelven con una sola operación (12 pastillas por paquete x 36 paquetes = 432 pastillas, y 360 caramelos : 36 paquetes = 10 caramelos por paquete), mientras que el tercero puede pensarse como la composición de dos problemas, uno "de multiplicar" y otro "de dividir". Asimismo, los tres responden a las relaciones de proporcionalidad directa. En este sentido, y tal como hemos afirmado en *Cuadernos* anteriores, es esencial que la proporcionalidad no se presente como un contenido nuevo sin conexión con lo aprendido hasta este momento sobre multiplicación y división. Al respecto Panizza y Sadovsky[17] plantean:

....no se trata de que el docente anuncie en los primeros años que estos son problemas elementales de proporcionalidad. Se trata de recuperar explícitamente tales problemas en el momento en que la proporcionalidad adquiere el status de un contenido para aprender.

Desde 5to año/grado, se propone avanzar incluyendo problemas en los que las cantidades que se vinculan estén expresadas con expresiones decimales y fraccionarias, relacionadas a través de constantes de proporcionalidad con valores naturales. En 6° año/grado, avanzaremos con constantes de proporcionalidad racionales, haciendo hincapié en el estudio de la constante.

Inicialmente, podremos plantear problemas que se puedan resolver aplicando las propiedades de la proporcionalidad directa conocidas ya desde 5° año/grado, en los que se pueden incluir números racionales y constante de proporcionalidad natural. Por tanto, para la resolución, será necesario plantear multi-

---

[17] **Recomendación de lectura:** véase "Proporcionalidad: del dogma a la construcción de los procedimientos", en Ponce, H. (2000), *Enseñar y aprender matemática, Propuestas para el Segundo Ciclo,* Buenos Aires, Novedades Educativas y Panizza, M. y Sadovsky, P. (1991), *El papel del problema en la construcción de los conocimientos matemáticos*, Buenos Aires, FLACSO.

plicaciones y divisiones de fracciones o expresiones decimales por un número natural. Si además, se elige que la constante sea racional, las operaciones para resolver serán entre racionales. Un ejemplo, de este último tipo de problemas es el siguiente.

- Para preparar un flan para 7 personas, Jimena usa una receta para 4 personas, en la que los ingredientes son 8 huevos, $\frac{1}{4}$ kg de azúcar y $\frac{1}{2}$ l de leche. ¿Qué cantidades de cada ingrediente debe utilizar?

La resolución de este problema puede dar lugar a pensar primero en los ingredientes necesarios para una persona, dividiendo por 4, y luego los necesarios para 7 personas, multiplicando por 7, con lo que cada cantidad resulta multiplicada por $\frac{7}{4}$, que es la constante de proporcionalidad. Se deberá resolver entonces $\frac{7}{4}$ x 8 para averiguar la cantidad de huevos, $\frac{7}{4}$ x $\frac{1}{4}$, para averiguar cuánto de azúcar, y $\frac{7}{4}$ x $\frac{1}{2}$, para saber cuánto de leche. Como veremos más adelante en este mismo apartado, esto implica calcular la parte de una cantidad, en el caso de los huevos y la parte de una parte, en el caso del azúcar y de la leche.

En el apartado "Plantear situaciones para analizar relaciones de proporcionalidad" se desarrollará el trabajo que se podría realizar en 6to año/grado con problemas de proporcionalidad que dan sentido a las multiplicaciones y divisiones de fracciones o expresiones decimales.

Los problemas de **producto de medidas** son aquellos donde intervienen tres magnitudes. Es el caso, por ejemplo, de los problemas donde intervienen el ancho, el largo y el área de un rectángulo, o el área de la base, la altura y el volumen de un prisma, o la velocidad de un móvil, el espacio que recorre y el tiempo que tarda en hacerlo. En 6° año/grado, podemos plantear algunos problemas de este tipo, como los siguientes.

- ¿Cómo hacer para averiguar la cantidad de baldosas de un patio rectangular, sabiendo que tiene 30 baldosas de ancho y 45 baldosas de largo?

- Calculá el área de un rectángulo de $3\frac{1}{2}$ de largo y $2\frac{1}{4}$ de ancho.

El problema de las baldosas que cubren un patio puede resolverse multiplicando el número de baldosas de ancho por el número de baldosas de largo, para obtener el total de baldosas.

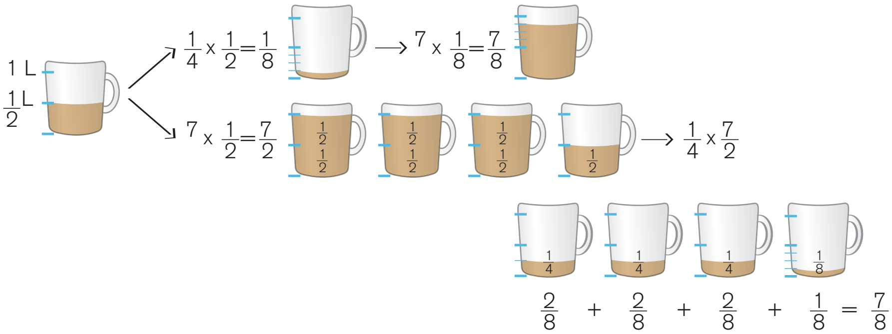
También se puede abordar este problema con una relación de proporcionalidad, pensando que son 45 filas de 30 baldosas cada una. Por ejemplo:

N° filas	1	10	5	40	45
N° baldosas	30	300	150	1200	1500

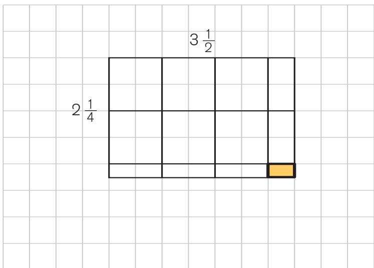
El cálculo de la medida de una superficie (un área) planteado en el segundo problema es un ejemplo con el largo y el ancho expresados en fracciones. El cálculo del área resulta un contexto que aporta significado a la multiplicación de expresiones fraccionarias o decimales, pues habrá que resolver $3\frac{1}{2}$ x $2\frac{1}{4}$, ó $\frac{7}{2}$ x $\frac{9}{4}$, ó 3,5 x 2,25, que nos remite al cálculo de la parte de una parte. Antes de avanzar sobre cómo se podría pensar este problema, veamos qué se ha realizado en 5° año/grado en relación con esto.

En *Cuadernos para el aula: Matemática 5°*, se señaló que algunos problemas ligados a la multiplicación refieren al **cálculo de una parte** de una cantidad. Esto se planteó en situaciones de reparto en partes iguales, al calcular la cuarta parte, la mitad o las tres cuartas partes, usando escrituras fraccionarias. En 6°año/grado, podremos retomar este tema proponiendo problemas como el del flan, planteado arriba, donde la búsqueda de los $\frac{7}{4}$ de 8 huevos puede pensarse como dividir el 8 por 4, para buscar la cuarta parte y tomar esa parte 7 veces, lo que supone pensar a $\frac{7}{4}$ como el séptuplo de la cuarta parte o 7 veces un cuarto, es decir 7 x $\frac{1}{4}$.

En este año, la tarea nueva es calcular la parte de otra parte, tanto en problemas de proporcionalidad, por ejemplo el de los flanes, como en los de producto de medidas, por ejemplo el del área del rectángulo. En el problema del flan, para los $\frac{7}{4}$ del medio litro de leche es interesante observar que, al igual que cuando se calcula la parte de una cantidad entera, es indistinto respecto del resultado qué operación se hace primero, si la división o la multiplicación. En efecto, si se calcula primero la cuarta parte de $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{8}$) y luego se hace el séptuplo ($\frac{7}{8}$), se obtiene el mismo resultado que si se calcula primero el séptuplo de $\frac{1}{2}$ ($\frac{7}{2}$) y después la cuarta parte ($\frac{7}{8}$), aunque el significado de lo que se hace sea distinto.



En el caso del problema del área, se puede pensar $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}$, expresando cada número racional como número mixto con una suma y usando la propiedad distributiva.



$$(3 + \tfrac{1}{2}) \times (2 + \tfrac{1}{4}) = (3 \times 2) + (3 \times \tfrac{1}{4}) + (2 \times \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{4}) =$$

$$= 6 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} =$$

$$= 6 + \tfrac{3}{4} + 1 + \tfrac{1}{8} =$$

$$= 7 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{8} =$$

$$= 7 + \tfrac{7}{8} = \tfrac{56}{8} + \tfrac{7}{8} = \tfrac{63}{8}$$

También se puede pensar expresando cada número racional como una fracción y vinculando cada una con el producto de un natural por una fracción de numerador 1. En ambos casos, hay que advertir que la parte sombreada es la cuarta parte de la mitad, o la mitad de la cuarta parte.

$$3\tfrac{1}{2} \times 2\tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{2} \times \tfrac{9}{4} =$$

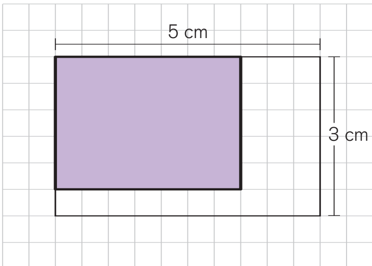
$$= 7 \times \tfrac{1}{2} \times 9 \times \tfrac{1}{4} =$$

$$= 7 \times 9 \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{4} =$$

$$= 63 \times \tfrac{1}{8} = \tfrac{63}{8}$$

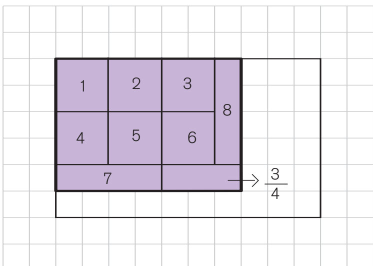
La cuestión del cálculo de un área donde aparecen medidas con números decimales también puede ser presentada con una tarea diferente para los chicos, la de analizar procedimientos de resolución realizados por otros. Por ejemplo:

• Antonio, Pedro y Ana debían calcular el área que se ha pintado en un rectángulo de 3 cm por 5 cm.



Discutí con tus compañeros si las siguientes formas que eligió cada uno para calcular el rectángulo son válidas.

a) Antonio contó todos los cuadrados de 1 cm^2 y llegó a 6 cm^2, a estos sumó 4 mitades de $\frac{1}{2}$ cm^2 para formar 2 cm^2 más (6 cm^2 + 2cm^2 = 8 cm^2) y luego contó y sumó al resultado anterior los $\frac{3}{4}$ cm^2. El resultado le dio 8 cm^2 y $\frac{3}{4}$ cm^2.



b) Pedro usó la fórmula del rectángulo y multiplicó el largo por el ancho usando fracciones
$\frac{7}{2}$ cm² x $\frac{5}{2}$ cm² = 7 x $\frac{1}{2}$ x 5 x $\frac{1}{2}$ = 35 x $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2}$ = 35 x $\frac{1}{4}$ = $\frac{35}{4}$ cm².

c) Ana multiplicó 3,5 cm² x 2,5 cm² = 8,75 cm².

Al plantear este problema[18], durante la discusión se observó que los alumnos:
- entendieron fácilmente cómo Antonio había medido los 8 cm² y, para interpretar los $\frac{3}{4}$ cm², reconstruyeron 1 cm² en forma gráfica y pintaron sobre el mismo los tres cuadraditos de $\frac{1}{4}$.
- asociaron la expresión fraccionaria $\frac{3}{4}$ a la expresión decimal 0,75.
- dividieron la expresión fraccionaria $\frac{35}{4}$ y la asociaron con la expresión decimal 8,75.
- recurrir al gráfico para interpretar la expresión decimal 8,75 reconocieron la parte entera pero tuvieron dificultades para 0,75.
- solo luego de la intervención del docente, pudieron entender que 0,75 cm² representaba 75 mm². En este caso, el docente se valió del papel milimetrado y las argumentaciones de los alumnos respecto de la estrategia planteada por Antonio.

Los problemas de proporcionalidad y de producto de medidas aportan significado también a la **división de dos números racionales**. Para ello, será posible plantear, por ejemplo, un problema de área de una figura donde se informa el área y una de las dimensiones y se pregunta por la otra o un problema con magnitudes directamente proporcionales en el que se dan cantidades correspondientes y no se conoce la constante[19].

Entre los problemas que se puedan resolver con una división, es importante presentar situaciones en las que los cocientes sean exactos, como también otras en las que los cocientes se expresen en fracciones o decimales. Es conveniente que los alumnos vayan, poco a poco, tomando decisiones acerca de cuándo es conveniente utilizar la división exacta o la división entera (es decir, con restos) en función de la situación que modelizan, lo que les permitirá avanzar en la construcción del sentido de esta operación.

Cuando propongamos situaciones que se resuelvan utilizando la división entera, es importante que éstas no sólo exijan calcular los cocientes, sino también el análisis de los restos y la relación entre el divisor, el cociente y el resto.

---

[18] Las respuestas fueron dadas en el marco de Prácticas III del Profesorado de EGB 1 y 2 del Instituto Superior de Formación Docente N° 803 de Puerto Madryn, por alumnos de la “Escuela de la Costa” de Puerto Madryn.

[19] **Recomendación de lectura:** véase Pujadas, M. y Eguiluz, M. L. (2000), *Fracciones, ¿un quebradero de cabeza? Sugerencias para el aula,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

Algunos ejemplos de este tipo de problemas son los siguientes.

- Analía tiene que acomodar 245 discos compactos en estuches en los que caben 24. ¿Cuántos estuches necesitará si tiene que guardarlos a todos?

- Pedro dice que acomodó todos sus discos y llenó dos estuches de 24 fundas y $\frac{3}{4}$ de otro. ¿cuántos discos tiene Pedro?

- La maestra repartió un block de hojas entre sus 32 alumnos, dándoles 5 hojas a cada uno y le sobraron 20 hojas ¿Puede ser que el block tuviera 180 hojas?

Ante el primer problema, es posible que los alumnos digan que Analía necesita 10 estuches porque el cociente de dividir 245 : 24 es igual a 10, sin reparar en que es necesario guardarlos a todos, por lo tanto hay que analizar el resto.

En el caso del segundo problema, los $\frac{3}{4}$ vinculan el resto y el cociente. Los tres cuartos implican las $\frac{3}{4}$ partes de la capacidad que tiene el estuche (24), que es el resto (18) de la división por 24, es decir que ese cociente es un número mixto ($2 \frac{18}{24}$).

D = (24 x 2) + 18	$\begin{array}{l\|l} \boxed{} & 24 \\ \hline & 2 \\ 18 & \end{array}$

También en la tercera situación, se pone en juego la relación D = d x c + r que se verifica en la división entera. Para resolverla, los alumnos pueden dividir 180 dividido 32 y constatar que el cociente es 5 y el resto 20 o bien multiplicar 32 x 5 y sumar 20 con lo que podrán dar la respuesta.

Es interesante también que el análisis se centre en cómo varía el cociente en función de los restos, si se divide por el mismo número un intervalo de números consecutivos. La situación que sigue exige no sólo el análisis del resto, sino también el análisis acerca de qué ocurre con el cociente si se aumentan unidades al dividendo.

- Una lancha transporta pasajeros de una orilla del río a la otra. En cada viaje, transporta como máximo 24 personas:
  a) ¿Cuántos viajes hará para transportar 360 pasajeros? ¿Y si se suman 24 más a los anteriores?
  b) ¿Cuantos viajes hará para transportar 270 pasajeros? ¿Y 271?
  c) ¿Hasta cuántos pasajeros se pueden agregar a los 271, sin que sea necesario aumentar el número de viajes?

• Virginia y Agustín discuten acerca de la siguiente situación.
El quiosquero de la escuela tiene 280 caramelos y 15 bolsas. Si en cada una quiere poner 20 caramelos, ¿cuántos caramelos le faltan para completar todas las bolsas?
Agustín dice que para resolver la situación anterior no es necesario hacer una división. Virginia dice que sí. ¿Quién de los dos tiene razón?

• Cuatro amigos van a la heladería y deciden comprar entre todos un kilo de helado que cuesta $22. ¿Cuánto dinero tiene que aportar cada uno, si acuerdan en que todos van a pagar lo mismo?
Al día siguiente, sólo vuelven tres amigos a la heladería y deciden comprar igual un kilo de helado. ¿Cuánto dinero tendrá que aportar cada uno para reunir lo necesario?

Para resolver la situación de los viajes en lancha, los alumnos podrán utilizar la división o aproximar productos de 25 por un número, hasta llegar a 360. En el caso de que usen la división, comprobarán que el resto es cero, y que si se aumenta al menos un pasajero, ya aumenta el número de viajes, porque no pueden quedar pasajeros sin viajar. Por otro lado, analizar hasta cuántos pasajeros se pueden aumentar sin que aumente el número de viajes , implica ir analizando el resto.

La discusión de Virginia y Agustín, como hemos planteado en otras situaciones similares, aporta a la construcción del sentido de la división, pues los alumnos tienen que analizar si esa operación es útil o no para resolverlas. Además, en esta situación es posible discutir sobre el resto de la división, ya que con los 280 caramelos se podrá colocar 18 caramelos en cada bolsa y sobran 10 caramelos. Como en este problema se trabaja con cantidades discretas, aunque al dividir aparecen restos, para este caso el cociente es 18,66..., entonces no es posible “bajar decimales” y vemos que el 0,66... no tiene sentido en este contexto.

En el problema de la compra de helados, en cambio, las cantidades son continuas y es posible expresar el cociente con un número decimal. Además, esta cuestión plantea el tema del número de cifras decimales. Para la primera pregunta, un procedimiento posible es que los alumnos utilicen la división 22 : 4, cuyo cociente entero es 5, pero la situación implica la necesidad de “sacar decimales”, con lo que se obtiene un cociente exacto: $ 5,50. En el segundo caso, al dividir 22 : 3 se obtiene cociente 7 y resto 1 y, como es necesario reunir el dinero, se tienen que obtener cifras decimales. Sin embargo, aquí las cifras decimales son infinitas. Es interesante plantear la discusión acerca de si es posible que cada uno aporte $ 7,33 en función de nuestro sistema monetario, donde las monedas de 1 centavo no son de uso corriente y si en el caso de poder hacerlo, se reuniría el dinero para la compra.

Estas relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto, también se pueden analizar en situaciones de contexto intramatemático, por ejemplo las siguientes.

• Marisa y Pablo están haciendo cuentas de dividir.
a) Marisa dice que en una división el divisor es 5, el cociente es 25 y el resto es cero. ¿Cuál es el dividendo? ¿Cuál sería el dividendo, si el resto fuera 2? ¿Cuál sería el dividendo, si el resto fuera el máximo posible para una división con el mismo divisor y cociente de los que habla Marisa?

b) Pablo le dice a Marisa que si divide 125, 126, 127, 128 y 129 por 5, el cociente es siempre el mismo, sólo cambia el resto. ¿Vos que pensás? Si en la división 125: 5 el dividendo tuviera 7 unidades menos, ¿cuál es el valor del resto? ¿Se puede determinar sin hacer la cuenta?

c) Marisa dividió un número por otro y obtuvo cociente 20 y resto 12. ¿Cuáles pueden ser los números que dividió?

d) Pablo dice que resolvió la división 37 : 4 con la calculadora y en el visor apareció como cociente 9,25. Si la maestra le pidió el cociente y el resto sin sacar decimales, ¿Cómo puede hacer Pablo para calcular el resto?

Con este conjunto de problemas se apunta a trabajar las relaciones que se dan en la división entera: $D = d \times c + r$ con $r < d$. Al plantearlos, damos lugar a tomar como objeto de estudio las cuentas de dividir que se resuelven desde los primeros años de la escuela.

En la cuenta que plantea Marisa en el primer problema, hay un único dividendo posible, el 125. Sin embargo, si se pregunta a los alumnos si es posible encontrar otro dividendo, es frecuente observar que emprenden la búsqueda, pues aún no han elaborado la idea de que, cuando se han determinado tres de los números, el cuarto es único. En el resto de las preguntas, se propone el análisis de cómo se modifica uno de esos números cuando se modifica otro (el resto y el dividendo) si se dejan fijos el cociente y el divisor.

En el segundo problema, son dos los números que faltan: el divisor y el dividendo. El divisor debe cumplir con el requisito de ser mayor que el resto, de modo que esto permite asegurar que el divisor debe ser 13, o cualquier otro número natural mayor que él. En consecuencia, el problema tiene muchas (infinitas) soluciones.

En cuanto al último problema, se puede calcular el resto pensando en la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor y la parte entera del cociente, $37 - 9 \times 4 = 1$, o como el producto de la parte decimal del cociente por el divisor, $0,25 \times 4 = 1$.

Plantear situaciones para analizar relaciones de proporcionalidad

En 6° año/grado nuestro desafío será ofrecer a los alumnos la oportunidad de avanzar en los procedimientos de resolución de los problemas donde intervienen magnitudes directa e inversamente proporcionales. Reflexionar sobre las propiedades que actúan como instrumentos de resolución en los problemas de proporcionalidad y dominarlas para decidir cuál usar según los números que aparecen, significará para los alumnos contar con herramientas cada vez mejores.

Creemos que no ayudará a los alumnos comunicar y mostrar cómo funciona la regla de tres para resolver este tipo de problemas para que luego ellos la apliquen, sino que nuestra tarea será generar situaciones donde estas estrategias se puedan poner en juego. Luego, habrá que proponer el análisis de esas estrategias para separarlas del problema con el propósito de que puedan reinvertirlas en otras situaciones.

Para que los alumnos puedan analizar las relaciones involucradas en los problemas donde intervienen **magnitudes directamente proporcionales**, habrá que considerar, en primera instancia, que avancen en los procedimientos de resolución utilizando conocimientos no tratados hasta 5° año/grado, ya que sólo después de haberlos utilizado podrán reflexionar sobre ellos. En este caso, para los problemas donde intervienen magnitudes directamente proporcionales, lo nuevo es la propiedad de la constante de proporcionalidad.

Para caracterizar estos problemas, consideremos uno como el siguiente, donde los chicos podrían comenzar a resolver usando propiedades de la proporcionalidad conocidas desde 5° año/grado y que muestra cómo, en muchos caso, no tiene sentido el pasaje por la unidad. Teniendo un par de valores de la tabla, 15 y $ 1,5, es posible preguntar por el precio de diferentes cantidades de fotocopias.

• Calculá el costo de las cantidades de fotocopias que aparecen en la tabla.

Cantidad de fotocopias	15	60	10	5	1	27
Precio ($)	1,5					

Si la cantidad de fotocopias es múltiplo de 15, como ocurre para 60, los alumnos podrán usar las siguientes estrategias:

- pensar en multiplicar por 4 las fotocopias: 15 x 4 = 60; y su precio: $ 1,5 x 4 = $ 6;
- pensar en el valor de 30 fotocopias, porque es más fácil calcular el doble de 1,5 y luego volver a duplicar las 30 fotocopias, y así obtener el costo de las 60 fotocopias.

En los dos procedimientos anteriores se pone en juego la propiedad *Si en una relación de proporcionalidad directa se multiplica una cantidad de una magnitud por un número la cantidad correspondiente, en la otra magnitud queda multiplicada por el mismo número.*

Algunos chicos podrían usar esta otra estrategia:

- pensar en el valor de 30 fotocopias, porque es más fácil que calcular el doble de 1,5 y luego sumar 30 + 30 para llegar a 60 y \$ 3 + \$ 3.

Este procedimiento en cambio, involucra otra propiedad: *En una relación de proporcionalidad directa, se cumple que a la suma de dos cantidades de una misma magnitud, le corresponde la suma de las cantidades correspondientes en la otra magnitud.*

Si tomamos como dato el mismo par de valores de la tabla, y pedimos el precio de 27 fotocopias, es posible que los chicos lo resuelvan con dos tipos de estrategias:

- pensar en dos pasos, dividir primero por 15 para saber el precio de una fotocopia y luego multiplicar por 27 para calcular el costo total.
- advertir que, para todos los pares de valores de la tabla la relación entre la cantidad de fotocopias y el precio es $\frac{1}{10}$, es decir, que si se multiplica por $\frac{1}{10}$ la cantidad de fotocopias se obtiene el precio.

El primer procedimiento implica el “paso por la unidad” o búsqueda del valor unitario, y el segundo involucra el uso de la propiedad *En una relación de proporcionalidad directa, se cumple que el cociente entre los pares de cantidades correspondientes a ambas magnitudes es constante.*

Podemos pensar el segundo procedimiento como una generalización del primero, pues en uno se busca la relación entre dos cantidades (15 fotocopias y \$ 1,5) y en el otro, la relación entre todos los pares de cantidades.

El análisis de este problema nos ha permitido ver que, al cambiar los datos, se modifican los conocimientos que se pueden utilizar para resolverla. De este modo, el mismo problema permite, con unos datos, revisar propiedades conocidas y con otros, dar lugar al uso de otras nuevas.

La situación anterior muestra que entre las magnitudes directamente proporcionales que intervienen se pueden establecer dos tipos de relaciones:

- una relación entre cantidades de una misma magnitud, relación escalar ($\frac{15}{60}$).
- una relación funcional, que vincula magnitudes diferentes como es precio/fotocopia (precio por fotocopia) y que refleja el sentido de la unidad de razón o la constante de proporcionalidad.

A medida que presentemos en la clase problemas como el anterior, con tablas de números proporcionales, los alumnos harán explícitas, mediante los procesos de resolución y comunicación de procedimientos, las dos relaciones que caracterizan a la proporcionalidad: la constancia de las relaciones escalares y la constante de proporcionalidad. La reflexión por parte de los chicos al usar estas relaciones, tanto de manera cuantitativa como cualitativa, les permitirá avanzar en la conceptualización de la proporcionalidad.

Consideremos dos nuevos ejemplos:

• Don Juan desea completar la siguiente lista de precios del queso sardo, haciendo sólo una cuenta con su máquina de calcular. Si $\frac{1}{2}$ kg cuesta $ 12,20, ¿qué cuenta podría hacer para saber cuánto debe cobrar? Completá la tabla.

Peso	$\frac{1}{2}$ kg	$\frac{1}{4}$ kg	$\frac{3}{4}$ kg	1 kg	2 kg	4 kg	5 kg	100 g	150 g
Precios	$12,20								

• Una industria posee una máquina que produce en 4 horas, 752 barras de aluminio. El gerente de producción desea saber lo que puede producir la máquina, si se trabaja en forma continua durante los tiempos indicados en la siguiente tabla:

Tiempo	4 hs	5 hs	6 hs	8 hs	1 día	1 mes
Número de barras	752					

En el primer caso, pedir la realización de una sola cuenta favorecerá centrar las discusiones, especialmente en la relación que permite determinar la constante de proporcionalidad. Este valor permitirá a los alumnos determinar los diferentes precios con solo multiplicar el valor de dicha constante por las diferentes cantidades. Al preguntar, además, por 100 g ó 150 g se plantea la necesidad de conocer las relaciones entre las unidades de medida, en este caso que 1 kg = 1000 g.

En el segundo problema, preguntar, por ejemplo, *¿qué pasaría si la máquina dejara de funcionar?* o *¿cómo expresamos simbólicamente el día que la máquina no tuvo producción?*, nos permitiría avanzar sobre la idea de que si no hay producción, al cero de una magnitud, le corresponde el cero en la otra.

Además, como parte del análisis, nuevamente podremos propiciar la discusión en relación con los siguientes aspectos.

- la cantidad de datos dados y cuántos calcularon a partir de los mismos,
- las magnitudes que se involucran, para luego concluir que a partir de dos datos se pueden encontrar otros, relacionando magnitudes (horas y cantidad de barras producidas), siempre que la máquina funcione en forma constante.
- la conveniencia de utilizar las relaciones escalares (aditivas o multiplicativas) y las relaciones funcionales para obtener los diferentes resultados.

- las relaciones entre la diferentes unidades de tiempo que aparecen.

Cuando se aborda el trabajo sobre proporcionalidad en el aula, es interesante proponer actividades que planteen la discusión acerca de las características que hacen que determinado problema pueda ser considerado de proporcionalidad, por ejemplo, el análisis de varios problemas en los que se den relaciones de proporcionalidad y otros en los que no. Esto ayudará a los alumnos a aproximarse al sentido del concepto de razón y comprender el significado de los símbolos utilizados para expresar proporciones.

Por ejemplo, si preguntamos *qué planta ha crecido más en esta semana y los registros nos dicen que la planta A medía 8 cm y ahora mide 12 cm y que la planta B medía 10 cm y ahora mide 14 cm,* podríamos tener dos respuestas:
- *Ambas plantas crecieron lo mismo* (si se miran sólo los cambios absolutos).
- *La planta A creció 4 cm de los 12 cm que mide y la planta B creció 4 cm de los 14 cm que mide, por lo tanto creció más la planta A ya que* $\frac{4}{12}$ *es mayor que* $\frac{4}{14}$.

Cuando se razona sobre situaciones en las que se ponen en juego relaciones de proporcionalidad, es importante pensar que en las relaciones aditivas y multiplicativas hay cambios absolutos y cambios relativos. La habilidad de pensar en términos relativos se vincula con el razonamiento proporcional. La noción de razón como índice comparativo entre dos cantidades fundamenta este segundo tipo de aproximación.

Una actividad cuyo propósito es analizar la existencia o no de la proporcionalidad podría ser la siguiente.

a) Analizá los siguientes problemas e indicá cuáles creés que son de proporcionalidad.

1. La receta para preparar milanesas de soja dice que con 200 gramos de soja preparamos milanesas para tres porciones. ¿Cuánta soja se necesitará para 5 porciones?
2. Cuando cumplió 6 meses, Federico pesaba 9 kg. ¿Cuánto habrá pesado al cumplir 1 año?
3. Si por 5 CD's pagué $ 9, ¿cuánto dinero necesitaré para comprar 12?
4. Si para recorrer 25 km mi auto consume 2 litros de nafta, ¿cuánto combustible consumirá para recorrer 200 km?
5. Si al nacer, Juliana medía 0, 52 m, ¿cuánto medirá a los tres meses? ¿Y al año?
6. Cuando Javier cumplió 3 años, su papá tenía 28 años. ¿Cuántos tendrá el papá cuando Javier cumpla el triple?

b) Discutí con tu grupo los resultados a los que llegó cada integrante para llegar a un acuerdo.

c) Por último, buscá con los integrantes de tu grupo un argumento que convenza a los otros grupos acerca de la clasificación que hicieron.

Analizar cómo y cuánto cambia una cantidad en relación a otra ayuda a comprender qué sucede en estos problemas, ya que hay relaciones no proporcionales, pero que parecen serlo. De hecho, el análisis de la constante resulta una herramienta útil para decidir si existe o no proporcionalidad.

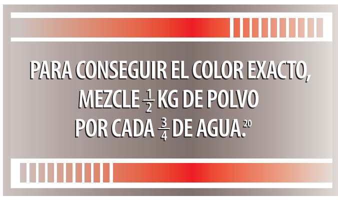
Los problemas anteriores se plantean en diferentes contextos, algunos de los cuales permiten evidenciar más claramente la no existencia de una constante de proporcionalidad. Por ejemplo, en el segundo problema, los alumnos saben que no es posible que una persona aumente 9 kg por cada seis meses. Utilizar esta relación para resolver el problema haría que el niño, al año, pese 18 kg, a los dos años 36 kg a los 3 años 54 kg, etc. El conocimiento que tienen de la relación que existe entre el aumento del peso de una persona respecto del tiempo, les permitirá descartar un razonamiento de tipo proporcional para resolverlo.

Otros ejemplos de relaciones de proporcionalidad directa son aquellas situaciones en las que la constante de proporcionalidad representa un índice comparativo de cantidades de la misma magnitud.

- Para hacer jugo de frutilla, Juana vierte 3 litros de agua en 1 jarra donde previamente colocó 2 cucharadas de jugo concentrado. Para la fiesta de su hermana, Juana necesita calcular cantidades mayores, y decide hacer una tabla como la siguiente, para saber cuántos litros de agua necesita para las siguientes cantidades de jugo concentrado para que tenga el mismo sabor. Completá la tabla.

Cantidad de cucharadas de jugo concentrado	2	4	6	12	20
Cantidad de litros de agua	3				

- Antes de preparar la pintura, Carlos lee las siguientes instrucciones:



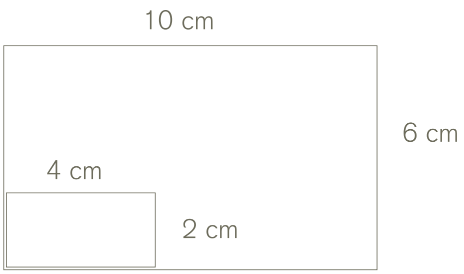
a. ¿Qué cantidad de agua necesita Carlos si usa 1 kg de polvo?
b. ¿Y si usa $\frac{1}{4}$ kg de polvo?
c. ¿Y si usa $\frac{3}{4}$ kg de polvo?

[20] Tomado de Sadovsky, P. (coord.), Lamela, C; Carrasco, D. (2005), *Matemática. Fracciones y Números decimales. 6° grado. Apuntes para la enseñanza.* Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de currícula.

¡Una ayudita! Podés construir una tabla como la siguiente:

Cantidad de polvo en kg	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
Cantidad de agua en litros	$\frac{3}{4}$			

• Se necesita reducir este plano. Para eso, hacé 3 cm por cada 4 cm.



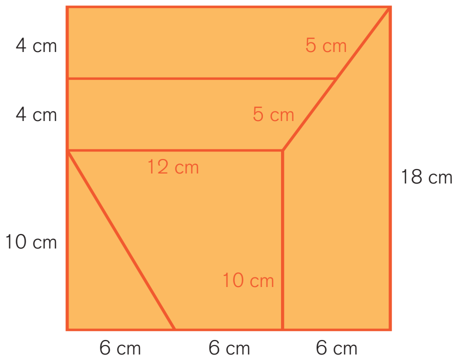
En el primer problema, más allá de las diferentes estrategias para completar la tabla, se recupera el concepto de equivalencia asociado a la conservación de la proporción entre las partes de jugo concentrado y agua, y no a la conservación de la cantidad de jugo. Los pares de números que aparecen en la tabla son fracciones equivalentes cuyo significado está asociado ahora a la concentración del jugo o a la mezcla entre las cucharadas de jugo concentrado y la cantidad de agua. Siendo esta relación la constante de proporcionalidad $\frac{3}{2}$ (1,5 de agua por cada cucharada de jugo) que queda explícita cuando es necesario determinar el valor que se corresponde con el 1 (en este ejemplo. expresa la cantidad de litros de agua por cada cucharada de jugo).

En el segundo problema, que la constante sea una fracción, exige que los alumnos busquen formas de encontrar resultados a los productos de dos fracciones, en función de relaciones como: el doble, la cuarta parte, la mitad…

En el tercer problema, se trabaja con **escalas**. En este caso, las fracciones son un índice comparativo de una misma magnitud. Cuando se resuelven problemas de escalas de mapas, ampliaciones o reducciones, es interesante analizar el significado del valor de la constante en relación a lo que su aplicación produce, si es menor que la unidad se vincula a una reducción y si es mayor que la unidad da como resultado una ampliación.

Una actividad interesante para proponer a nuestros alumnos es la ampliación del rompecabezas que se adapta de una secuencia diseñada por Brousseau[21] y que seguramente han visto en otros textos.

“Agrandar el rompecabezas entre todos”: analizar el valor de la constante.
Materiales: un rompecabezas por grupo y uno de mayor tamaño completo para colocar en el pizarrón.
Organización de la clase: grupos de 6 integrantes.
Desarrollo: podemos comenzar con una consigna oral, como la siguiente:
Tienen que ampliar el rompecabezas, de modo que lo que en cada pieza mide 4 cm en el rompecabezas que les di, mida 5 cm en el que hacen ustedes. Cada integrante tiene que hacer una pieza. Como las piezas son cinco, habrá un alumno que será el observador, cuya tarea será anotar todo lo que se diga o discuta en el grupo. Antes de empezar a trabajar elijan quién será el observador.



En muchos casos, los chicos creen que a cada pieza tienen que agregarle 1 cm y se sorprenden cuando las piezas no encajan. Esto les exige dudar sobre su construcción, pero la mayoría piensa que no usó bien los instrumentos de medición y vuelven a construir las piezas, porque no siempre ponen en duda el criterio que usaron en la confección de las piezas.

[21] Brousseau, G. (1994), *Problemas en la Enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales.* Publicación de IMAF, Universidad Nacional de Córdoba. Traducción realizada por Dilma Fregona y Rafael Soto con autorización del autor Brousseau, Guy (1981), de “Problemes en didactique des décimaux”, en *Recherches en didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage,* vol. 2, núm. 1, Francia.

Si la consigna fuera que los lados de las piezas que miden 4 cm deberán medir 8 cm en el nuevo rompecabezas, seguramente lo ampliarán sin dificultad, dado que la relación del doble no exige pensar otras relaciones y las piezas resultan ampliadas proporcionalmente. Los alumnos reconocen que el modelo de proporcionalidad les es útil para ampliar el rompecabezas cuando se dan cuenta de que tienen que averiguar la imagen de 1 cm para poder encontrar las nuevas medidas da cada pieza.

En el caso del rompecabezas, se pone de manifiesto que la relación entre cada lado y su imagen es una constante. Esto ocurre en cualquier situación de escalas, dado que una escala presenta información sobre una relación que se establece entre una medida en una representación gráfica y una medida de la realidad.[22]

Los problemas de escalas pueden plantearse a propósito del trabajo en otras áreas, como Ciencias Sociales. Por un lado, se puede continuar confeccionando planos de espacios de diversas dimensiones y por otro se puede promover la interpretación de mapas. Por ejemplo, al comparar las distancias entre dos pares de localidades en mapas representados en distintas escalas.

En otros problemas, la constante de proporcionalidad está expresada con fracciones y representan un índice comparativo que vincula dos magnitudes diferentes. Veamos dos ejemplos.

• Un caminante recorre 5 km en 2 horas. Suponiendo que mantiene la velocidad de la marcha, completá la tabla que sigue:

Tiempo de marcha del caminante en hs	2	4	6	$\frac{3}{4}$
Distancia recorrida en km	5			

• En la siguiente tabla, se muestra el consumo de nafta de un automóvil al recorrer cierta cantidad de kilómetros. Completá la tabla sabiendo que el automóvil consume lo mismo por cada kilómetro recorrido.

[22] **Recomendación de lectura:** véase Ponce, H. (2000), "Proporcionalidad: entre los procedimientos y la búsqueda de regularidades", en *Enseñar y aprender matemática,* Propuestas para el Segundo Ciclo, Buenos Aires, Novedades Educativas.

Kilómetros recorridos	1	2	3	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
Consumo de nafta en litros	$\frac{1}{10}$					

En el caso de las velocidades, las dos magnitudes son el espacio recorrido en una unidad de longitud (km, m, millas, nudos) y el tiempo utilizado en una unidad de tiempo (horas, segundos, minutos), en tanto que las unidades correspondientes a las velocidades son compuestas: km/h, m/seg, etc. En el caso del consumo de nafta, la unidad compuesta expresa el rendimiento en litros/km.

En el primer problema, la constante de proporcionalidad $\frac{5}{2}$ permite "pasar" de tiempo a distancia. Este problema pone en juego el concepto de fracción y en el caso de saber la distancia que recorre un automóvil en $\frac{3}{4}$ de hora, da sentido a la multiplicación de fracciones. Si bien los alumnos aún no han sistematizado la multiplicación de fracciones, estarán en condiciones de averiguar dicha distancia utilizando las propiedades de la proporcionalidad directa.

En el segundo problema,[23] los alumnos podrán completar sin dificultad las casillas de la tabla que representan números enteros, dado que son productos de una fracción por un número natural. Es posible que la dificultad se dé para calcular $\frac{1}{10}$ por $\frac{3}{2}$ porque aún no han multiplicado fracciones, pero sin embargo podrán calcular cuánto consume en $\frac{1}{2}$ kilómetro como así también la mitad de lo que consume en 1 kilómetro. Y si para $\frac{1}{2}$ la cantidad que le corresponde es $\frac{1}{20}$, para $\frac{3}{2}$ será $\frac{3}{20}$. A partir de aquí, podremos proponer otros casos, para dar a los alumnos la oportunidad de ir construyendo estrategias para multiplicar dos fracciones a partir de herramientas propias.

En el caso de **porcentaje**, aparece nuevamente la fracción como índice comparativo o constante de proporcionalidad. Al tratar de interpretar el 50% de 20, estamos comparando las partes con el todo. Así, buscamos vincular la relación 50 por cada 100 con una fracción equivalente de denominador 20.

En el apartado "Plantear situaciones para obtener y organizar datos", se propone el trabajo con gráficos circulares en los que el uso de los porcentajes cobra especial sentido.

[23] **Recomendación de lectura:** véase Sadovsky, P. (coord.), Lamela, C. y Carrasco, D. (2005), *Matemática Fracciones y Números Decimales. 6° grado. Apuntes para la enseñanza*, G.C.B.A, Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula, Buenos Aires.

• En la ciudad de Trelew, se realizaron los juegos deportivos interescolares en los que participaron 80 alumnos. De acuerdo a las diferentes categorías y juegos, lograron estos premios:

- 3 alumnos obtuvieron el primer puesto en salto en largo y 5 alumnos el primer puesto en velocidad,
- 2 equipos de fútbol (22 alumnos) lograron el segundo puesto y
- 15 alumnos obtuvieron los terceros puestos en diferentes juegos.

Decidí, haciendo cálculos mentales, cuáles de las siguientes afirmaciones de los chicos son ciertas:

1. Más del 50% de los alumnos trajeron premios.
2. El 10% logró estar en los dos primeros puestos.
3. Más del 25% de los alumnos alcanzó el segundo puesto.

En este problema, se incluyen porcentajes que se pueden calcular mentalmente en forma sencilla, si se asocia el 50% con $\frac{1}{2}$, el 25% con $\frac{1}{4}$ y el 10% con la décima parte.

También es interesante analizar algunos problemas en los que es habitual suponer algunos datos que no están explicitados en el enunciado y que permiten profundizar el sentido de la proporcionalidad directa. Veamos varios ejemplos:

• Este mes la biblioteca de la escuela recibió 48 libros menos. Si se quieren acomodar 4 estantes, ¿cuántos libros se colocan en cada uno?

• Una persona que vive a 15 cuadras del trabajo, paga un boleto de $ 0,90 ¿Cuánto pagará otra persona que toma el mismo micro y vive a 40 cuadras del trabajo?

• Si cinco litros de aceite cuestan $ 18,50, ¿cuánto pagaremos por 10 litros?

En el primer caso, el dato supuesto es la repartición en partes iguales, aunque esta no sea una condición expresada en el enunciado. En el segundo caso, puede cuestionarse un procedimiento de proporcionalidad, ya que el contexto que permite imaginar la situación nos hace saber que la tarifa de los colectivos no depende de la cantidad de cuadras que nos traslada. Normalmente, la tarifa corresponde a tramos o a un recorrido completo. En el último caso, es bastante habitual considerar la existencia de la constante cuando no existe alguna condición por la cual se hace algún descuento como en el caso de las ofertas (pagué 9 litros y llevé 10).

En esta clase de problemas, deberemos discutir sobre las condiciones que se debieran agregar o cambiar a las distintas situaciones y, con este fin, tendremos que pedir a los alumnos que agreguen los datos necesarios para resolverlos, utilizando el concepto de proporcionalidad. De este modo, daremos lugar a discutir sobre los datos necesarios para poder utilizar el concepto de proporcionalidad directa como modelo de resolución como así también reflexionar sobre los límites[24] que tiene el concepto.

Otro contexto que favorece la discusión sobre la utilidad del modelo de proporcionalidad es el de las ofertas. También aquí el análisis de la constante resulta una herramienta útil para decidir si existe o no proporcionalidad.

• Lorena fue a comprar $\frac{3}{4}$ kg de helados y en la lista figuraban los siguientes precios:

Lorena pensaba pagar $ 7,50 y el heladero le dijo que debía pagar $ 10.
a) ¿Por qué pensó Lorena que debía pagar $ 7,50?
b) ¿Cómo habría explicado el heladero como calculó el valor de $ 10?
c) Modificá el enunciado de la situación para evitar la confusión.

En esta actividad, los chicos pueden responder que Lorena pensó en el precio unitario y calculó el valor de los $\frac{3}{4}$ kg utilizando la proporcionalidad, en tanto que el heladero sumó los precios de $\frac{1}{2}$ kg más $\frac{1}{4}$ kg ($ 6 + $ 4) independientemente de cualquier relación de proporcionalidad. Es interesante que promovamos la discusión acerca de que, en los datos de la lista de precios, cuando la cantidad del helado es menor, el costo es menor, pero el mismo no disminuye en la misma relación; por otra parte, el precio por cada kilo no representa la constante que permitirá determinar los valores de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. De los datos, resulta que para $\frac{3}{4}$ kg hay 3 precios posibles: $ 12, $ 10 y $ 7,50. Además, conviene comprar 1 kg y no dos medios kilos, pues la suma de los costos de los dos medios

[24] **Recomendación de lectura:** En *Matemática. Propuestas para el aula. EGB2. Materiales para el docente, Programa Nacional de Innovaciones educativas del Ministerio de la Nación, Propuesta N° 5,* se plantea una actividad para discutir acerca de los límites y la utilidad del concepto de la proporcionalidad directa en problemas de oferta (también disponible en Internet).

kilos es mayor que el precio por kilo. Por otra parte, si la relación fuera de proporcionalidad, considerando el costo unitario, el $\frac{1}{2}$ kilo debería valer \$ 5 y el $\frac{1}{4}$ kilo \$2,50. Por último, en la lista de precios podríamos agregar alguna inscripción, como *Oferta: illeve 1 kg y pague solo \$10!*

El análisis de los precios de diferentes artículos presentados en distintos tamaños (gaseosa, aceites, jabón en polvo, yerba, etc.) en las góndolas de los supermercados favorecerá la lectura inteligente de la información y la toma de decisiones respecto de la presencia o no de ofertas.

En cuanto a los problemas donde intervienen **magnitudes inversamente proporcionales**, es necesario plantear primero su resolución para luego considerar el análisis de las relaciones involucradas. Los problemas de fraccionamiento y envasado de productos proporcionan un contexto que permite otorgarles significado. Por ejemplo, los siguientes.

• Una pequeña bodega, en la provincia de La Rioja, decidió fraccionar en envases de menor capacidad el contenido de 80 damajuanas de 5 litros cada una. Averiguá qué cantidad de cada tipo envases sería necesaria, según las capacidades que aparecen indicadas en la tabla.

Capacidad del envase (litros)	5	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
Cantidad de envases	80				

A partir del primer par, es posible hallar el correspondiente de 1 litro pensando que, si el envase tiene 5 veces menos capacidad, serán necesarias 5 veces más unidades, por lo que habrá que hacer 80 x 5 = 400. En este caso, se usa una relación escalar, es decir donde se multiplica una cantidad y se divide otra, en ambos casos, por el número 5 sin unidades. Todos los demás pares podrán ser completados utilizando relaciones escalares y advirtiendo que para saber el correspondiente de $\frac{3}{4}$, convendrá calcular primero el de $\frac{1}{4}$.

También se podría resolver calculando la constante de proporcionalidad. En este caso, la constante representa la cantidad total de litros a envasar, y se puede obtener haciendo 5 litros por envase x 80 envases = 400 litros. Esta es una relación funcional que vincula magnitudes diferentes, la capacidad de cada envase con el número de envases necesarios.

La situación anterior muestra que entre las magnitudes inversamente proporcionales se pueden establecer dos tipos de relaciones:

- una relación entre cantidades de una misma magnitud, es decir una relación escalar.
- una relación funcional que vincula magnitudes diferentes y que refleja el sentido de la unidad de razón o la constante de proporcionalidad.

Estas relaciones pueden explicitarse del siguiente modo:

a) Si en una relación de proporcionalidad inversa se multiplica una cantidad de una magnitud por un número, la cantidad correspondiente en la otra magnitud queda dividida por el mismo número.

b) En una relación de proporcionalidad inversa, el producto de las cantidades correspondientes es constante.

Las relaciones entre bases y alturas de rectángulos que tienen la misma área (ver el apartado "Plantear situaciones para avanzar en la exploración de relaciones entre perímetros y áreas") o las relaciones entre la distancia recorrida y el tiempo necesario al aumentar la velocidad son otros contextos en los que se establecen relaciones de proporcionalidad inversa.

Plantear situaciones para sistematizar relaciones numéricas y propiedades de las operaciones

Las actividades de cálculo mental, es decir aquellas donde se realizan cálculos sin los algoritmos convencionales, invitan a reflexionar sobre las propiedades de los números y de las operaciones. Al plantearlas, propiciaremos que los alumnos avancen en el conjunto de relaciones que se pueden establecer entre determinados grupos de fracciones, entre ciertas fracciones y enteros, y entre los números decimales.

Si permitimos y favorecemos que los niños resuelvan explorando a su propio modo, seguramente inventarán procedimientos mediante los cuales utilizarán las propiedades de las operaciones, y recurrirán a descomponer los números y a escribirlos de diferentes formas. Para poder resolver este tipo de actividades, los niños se suelen apoyar en los cálculos que tienen disponibles (el repertorio memorizado de productos de naturales, de sumas y restas de fracciones sencillas y de números decimales) en las relaciones entre números que conocen (por ejemplo $\frac{1}{2}$ es el doble de $\frac{1}{4}$) y en diferentes expresiones escritas de números racionales (0,25 es lo mismo que $\frac{1}{4}$).

Al proponer a los chicos estas actividades, podemos avanzar en dos sentidos: analizar las **propiedades y relaciones de las operaciones y números** que ya usaron para sistematizarlas, y luego, discutir sobre la economía de los procedimientos que desarrollaron y su validez cuando se quieren utilizar con otros números. En este apartado nos ocuparemos del primer aspecto y en el apartado "Para avanzar en los procedimientos de cálculo con distintos tipos de números" del segundo.

La actividad que se plantea a continuación, de completamiento de recuadros, permitirá discutir el "efecto" de operar con 0 cuando se suma y cuando se multiplica.

• Sin cambiar las operaciones, en cada tira ¿qué variaciones es necesario hacer en los números, si partiéramos desde el cero?

1	+ 1999	2000	- 1500	500	: 500	1

1	x 2000	2000	: 4	500	: 500	1

El 0 es el "elemento neutro" para la suma y el "elemento absorbente" para la multiplicación. En el primer caso, al comenzar con el 0, el número que va es el 1999, es decir el mismo, En esta operación, el cero es neutro. En el segundo caso, cuando sólo hay operaciones de multiplicación y de división, es imposible encontrar un número que multiplicado por 0 permita continuar con la secuencia, porque el 0 "absorbe" cualquier otro y siempre el resultado será cero.

También es interesante plantear una actividad resuelta para problematizar algunas posibles soluciones de completado de recuadros, como por ejemplo la siguiente:

• Un grupo de chicos debía resolver el siguiente problema.
Escribí un número y una operación en cada recuadro para obtener el resultado:

2000		500		1

Para el primer recuadro, encontraron las expresiones siguientes:

2000 - 1500 = 500 *2000 : 4 = 500*

$2000 - \frac{3000}{2} = 500$ $2000 \times \frac{1}{4} = 500$ $2000 \times 0{,}25 = 500$

a) Discutí con tu grupo si estas opciones son verdaderas o falsas y justificá tus respuestas.

b) Algunos alumnos dijeron que pasar de 500 al 1 es más fácil y lo explicaron haciendo las siguientes afirmaciones. ¿Estás de acuerdo?

Para obtener 1 divido por el mismo número
Para obtener 1 hay que restar el anterior
Para obtener 1 multiplico por el inverso de 500 siempre da 1

c) Las explicaciones que dieron los alumnos, ¿se cumplen para otros números enteros, fraccionarios o decimales?

A propósito de la misma situación, podremos proponer la discusión en relación con las relaciones entre las operaciones

- dividir por 4 es equivalente a multiplicar por $\frac{1}{4}$ o por 0,25.
- dividir por el mismo número siempre dará uno y es equivalente a multiplicar por el inverso del número.

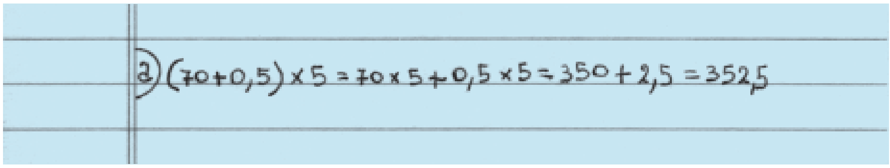
Asimismo, si extendemos dichas relaciones a todos los números de un campo numérico obtendremos la generalización, es decir podremos presentarlas a los alumnos como propiedades.

También es posible variar la actividad para completar recuadros, presentando ciertas restricciones, por ejemplo utilizando las cuatro operaciones y números decimales, o fraccionarios. Esto implicaría una complejidad en la actividad, pero favorecería la utilización de expresiones equivalentes de un número. O bien podríamos pensar en la utilización de algunas relaciones entre las operaciones, por ejemplo para pasar de 1 al 2000, la restricción puede ser no podrán sumar al 1 el anterior de 2000, lo que los conducirá a elegir la división 1 : 2.000.

Otras actividades, como las de realizar cálculos sin usar los algoritmos conocidos, promueven que los alumnos busquen estrategias propias y pongan en juego propiedades que ya han verificado que “funcionan”. Por ejemplo, la siguiente.

• Sin hacer la cuenta convencional, resolvé 70,5 x 5 y explicá cómo lo hiciste.

Para esta actividad, es posible que aparezcan en las carpetas algunas producciones como las que comentamos a continuación:



En esta primera estrategia, aparece la descomposición del número en su parte entera y en su parte decimal, y la propiedad distributiva de la multiplicación. Además, aunque no esté escrito, para hacer 70 x 5, pudo pensarse en la descomposición del número 70 en dos factores 70 = 10 x 7, y luego en tres factores 70 = 2 x 5 x 7. A continuación se pudo haber pensado en reemplazar el producto a realizar 70 x 5 = 2 x 5 x 7 x 5. Luego, pudo haberse asociado 70 x 5 = 10 x 35, para simplificar el cálculo utilizando productos que tienen disponibles como 7 x 5 = 35 y regularidades tales como la de agregar un cero a la derecha al multiplicar por 10.

b) 70,5 x 5 = $\frac{705}{10}$ x 5 = (705 x 5):10 = 3525:10 = 352,5

En este caso, se ha expresado setecientas cinco décimas como fracción decimal y luego aparece la multiplicación de dos naturales 705 x 5, conocida por los alumnos, y la utilización de la regularidad de la división seguida de ceros. Este ejemplo permite discutir por qué vale cambiar el orden según el cual primero se divide por 10 y luego se multiplica por 5 por el orden mediante el cual primero se multiplica por 5 y luego se divide por 10, que justificaría poder usar el segundo signo igual entre las expresiones.

La discusión para determinar la validez de estos procedimientos nos permitirá compararlos con los algoritmos convencionales y acercarnos a su comprensión, ya que hay aspectos de los procedimientos que los alumnos utilizan que también se juegan en el algoritmo convencional. Por ejemplo, conectando la primera expresión y la última en 70,5 x 5 = 325,5, se puede ver que se podría multiplicar como si fueran enteros y luego correr la coma.

Además, si ponemos en cuestión algunos procedimientos o partes de los mismos posibilitaremos el trabajo con otros conceptos. Por ejemplo, separar el número decimal en parte entera y en parte decimal (expresado como fracción o como decimal), para luego multiplicar ambas partes por 5, nos permitiría explicitar el uso la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Se pone de manifiesto aquí la importancia de propiciar el uso y la explicitación de propiedades conocidas y su aplicación para resolver cálculos nuevos. Así, se ponen en juego ciertos conocimientos, como la aplicación de cálculos mentales al interior de cálculos parciales, la utilización de ciertos productos o divisiones básicas y la habilidad para descomponer cantidades de diversas formas.

En este sentido, las discusiones podrán estar orientadas por la pregunta *¿cómo vale transformar una cuenta en otra que dé el mismo resultado, pero sea más fácil de hacer?* Las conclusiones que se buscará obtener tendrán formulaciones del tipo: *Para multiplicar y para sumar puedo disociar y conmutar. Para restar y dividir es posible usar equivalentes.*

1498 – 369 =
1500 – 371 =

54 x 36 =
54 x 12 x 3 =
162 x 2 x 6 =
324 x 6 = 1944

372 : 12 =
372 : 2 : 6 =
186 : 2 : 3 =
93 : 3 = 31

Plantear situaciones para analizar las relaciones de múltiplo y divisor

La escuela pitagórica[25], cuyo pensamiento fundamental es que todos los fenómenos del universo se pueden explicar mediante números, se dedicó a la exploración de los números, de sus propiedades y de sus relaciones con otras ramas del saber, como la geometría y la música. En esa búsqueda, los filósofos pitagóricos estudiaron muchos tipos de números a partir de ciertas relaciones y diversas regularidades. Entre ellas, las relaciones numéricas de múltiplo y divisor.

Si bien desde el Primer Ciclo los niños comienzan a descubrir en forma intuitiva ciertas características de las series numéricas, por ejemplo la cadencia de 0, 5, 0, 5 en la serie 0, 5, 10, 15, 20, 25…, que luego ponen en juego en situaciones de cálculo mental, el estudio de las propiedades de los números primos y compuestos que se reconoce como "divisibilidad" se inicia en el Segundo Ciclo y se profundiza en el Tercer Ciclo. Esto es así, porque los problemas que involucran este tipo de relaciones numéricas pertenecen al campo multiplicativo y resulta necesario que los alumnos hayan iniciado el estudio de las nociones de multiplicación y división y sus propiedades para construir las nociones que se ponen en juego en la divisibilidad.

Desde las propuestas de aula es necesario que propongamos problemas que permitan la progresiva comprensión de la reversibilidad de las relaciones de múltiplo y divisor a partir de otras relaciones, como doble-mitad, triple-tercio y otras. Por otra parte, los problemas que involucran los conceptos de división exacta y entera, así como el estudio del resto, permiten, durante el tercer ciclo, una aproximación al concepto de congruencia. Asimismo, el reconocimiento de las regularidades numéricas en las situaciones que se propongan favorecerá la sistematización posterior de los criterios de divisibilidad o las propiedades de múltiplos y divisores.

Secuencia para establecer relaciones de reversibilidad: "Múltiplos y divisores"

Con el fin de favorecer la comprensión de la reversibilidad entre "múltiplo" y "divisor", se puede proponer una secuencia de actividades como la que sigue.

[25] Corriente filosófica y matemática presocrática fundada por Pitágoras, en el siglo VI a. C.

Actividad 1

“Los nueve divisores”: encontrar divisores comunes
Materiales: una cuadrícula como la siguiente para cada alumno y un dado por grupo.
Organización de la clase: grupos de cuatro alumnos.
Desarrollo: antes de comenzar el juego, se decide quién va a tirar el dado.

	20	9	36
24			
25			
30			

En el desarrollo del juego se irá tirando el dado en forma sucesiva y “cantando” el número. Cada jugador escribe el número cantado en uno de los nueve lugares posibles dentro de la cuadrícula, siempre que el número sea divisor de uno de los números que encabezan las filas o las columnas o de ambos a la vez.
El dado se tira nueve veces. Cuando se escribe un número en la casilla, no se puede cambiar.
Gana el integrante que obtiene mayor puntaje, que se obtiene así: 2 puntos por cada número que es divisor del que encabeza la fila y del que encabeza la columna; 1 punto si el número es divisor sólo del número que encabeza la fila o la columna; 0 punto por las casillas vacías.

	20	9	36
24	4 2p	3 2p	6 2p
10	5 2p	3 1p	2 2p
18	2 2p	0p	6 2p

Transcribimos, a continuación, algunas expresiones que dijeron los chicos luego de jugar varias veces con la cuadrícula anterior. Es interesante observar cómo en estas expresiones los alumnos ponen en juego las relaciones entre múltiplos y divisores cuando aún no las han formalizado. Por ejemplo:

*–El uno es el comodín, puede ir en cualquier lugar o en el casillero correspondiente al **10 - 9**, porque los demás números del dado nunca te permiten sumar 2 puntos en ese casillero.*
*–Conviene que el cinco salga una sola vez. El primer cinco que sale hay que ponerlo en el casillero **10 - 20** solo ahí suma 2 puntos.*
–En los lugares que puede ir el cuatro también puede ir el dos.
–Hay que guardar los lugares del cuatro y no usarlos con el dos, porque para el dos tenés más opciones.
–Si a la fila del 20 y del 24 la ocupás con los dos y después te salen varios cuatros, no podés ponerlos. Conviene guardar la fila del 24, ahí los cuatro dan más puntos.

*—Los primeros tres que te salen te conviene ponerlos en la columna del 9, pero no en el medio. Arriba y abajo (en **24 - 9** y **18 - 9**) suman 2 puntos.*

Actividad 2

Luego de que los alumnos se han familiarizado con el juego y han explorado relaciones entre los múltiplos y divisores, podremos proponer actividades que lleven a reflexionar sobre estrategias para establecer relaciones y propiedades de los múltiplos y divisores.

En las actividades que propongamos, es importante variar algunos de los números que encabezan las filas y las columnas, para que los chicos transfieran algunas relaciones conocidas y piensen en otras. Por ejemplo:

• Ubicá en la cuadrícula los números 1 y 5 para obtener el mayor puntaje posible.

• Observá la cuadrícula e indicá los números que encabezan la fila y la columna, donde el 6 suma dos puntos. ¿En cuántos casilleros diferentes puede escribirse el número 6? ¿Qué números cambiarías para que en todos los casilleros donde puede ir el número el 6 se sumen 2 puntos?

	20	9	36
24	6	2	4
25			1
30	2	1	3

En los casos anteriores, los alumnos tendrán que decidir por un casillero donde 1, 5, 6 son divisores de dos números diferentes a la vez. Tener que cambiar los números que encabezan las filas o columnas los lleva a pensar en números que sean múltiplos de un mismo divisor.

Actividad 3

• Completá con diferentes números el cabezal de cada fila y de cada columna sabiendo que todos los números que están escritos te dan 2 puntos.

	1	5	6
	6	2	3
	4	2	3

• Al completar la tabla, Juan iba a colocar el 12 en el casillero que encabeza la fila con los divisores 4, 2 y 3 y se dio cuenta de que ya lo había escrito en la columna de divisores 1, 6, 4. Entonces dijo: *Escribo cualquier otro número que sea múltiplo de 12.*
¿Estás de acuerdo?, ¿por qué?
¿Qué números pudo escribir Juan?

	1	5	6
	6	2	3
	4	2	3

Completar los números que encabezan cada fila y cada columna, bajo una condición (sumar 2 puntos), implica tener distintas posibilidades para resolver y esto hay que tenerlo en cuenta para la puesta en común. Así, los chicos deberán pensar en esos números utilizando las relaciones de múltiplo y divisor, para luego descentrarse de la producción propia y analizar las producciones de sus compañeros y validarlas.

Es posible que la situación que se plantea involucrando a Juan sea parecida a lo que les pasó a ellos, ya que el 12 admite ser colocado en 4 de los 6 números que encabezan las filas o columnas. Elegir otros múltiplos de doce nos permite instalar que: *Si un número es múltiplo de otros (4, 2, 3) los múltiplos del primero son múltiplos de los segundos.*

Actividad 4

• En esta cuadrícula, se necesita cambiar el 6 para que no se repita.

a) Si se cambia el 6 por el 0 y por el 18, ¿qué opción da más posibilidades?
b) Discutí con sus compañeros qué otros números pueden sustituir al 6. ¿Cuántos hay?
c) Ana dijo que podían ser los múltiplos de 6. ¿Qué te parece?

	10	9	6
6			
30			
6			

En esta situación, incluir el cero implica ponerlo en discusión para ver que el mismo admite como divisores a todos los números (del dado y otros), ya que es múltiplo de todos los números. Al preguntar por la cantidad de números que pueden ser solución, llevamos a los alumnos a pensar en un conjunto de números tal, que la mejor forma de comunicar lo que tienen en común es haciendo referencia a todos aquellos que son múltiplo de 6. La afirmación de Ana ayuda a volver sobre la respuesta elaborada por los chicos para poder generalizarla.

Actividad 5

- De manera individual armá un nuevo tablero escribiendo los 6 números que encabezan las filas y columnas para que luego se puedan comparar las diferentes producciones. Tratá que el tablero te permita obtener el mayor puntaje posible. Luego, respondé con tus compañeros de grupo a las siguientes preguntas.

a) Si al tirar el dado sale siempre uno, ¿cuál es máximo puntaje que se puede obtener? ¿Y el mínimo? Pensá en los distintos tableros. ¿Varían las respuestas si cambian los números que encabezan cada fila y cada columna? ¿Por qué?

b) Si al tirar el dado salen todos cincos, ¿cuál es máximo puntaje que se puede obtener? ¿Y el mínimo? ¿Varían tus respuestas si cambiás los números cabezales de cada fila y cada columna? ¿Por qué?

c) Armá un nuevo tablero que te permita obtener un puntaje final elevado, escribiendo los números que encabezan las filas y las columnas.

En ambas situaciones, podremos discutir sobre todos los números que pudieron escribir y preguntar por otros que no aparezcan (números de una cifra, de dos, de tres, el cero, etc.). Esto permitiría acercarnos a la conclusión de que los números que encabezan las filas y las columnas podrían ser todos, inclusive el cero. También podríamos recuperar la idea de que *el uno es divisor de cualquier número.* A diferencia de la situación donde salen todos unos, la segunda lleva a concluir que las soluciones posibles son *todos los números que son múltiplos de 5 inclusive el cero.*

Si variamos esta actividad, cambiando los números que se mencionan en el punto a. (al tirar los dados salen todos dos, o todos tres, o cuatros o seis), nos llevaría a darle un mayor grado de generalidad a la propiedad del uno como divisor de todos los números. También podríamos dar lugar, por ejemplo en el caso de todos divisores dos, a discusiones que refieran a que los números posibles para el dos como divisor pueden ser los múltiplos de 4 o de 6 y así avanzar en relaciones tales como *si un número es múltiplo de 4, también es múltiplo de 2 o si un número es múltiplo de 6 también lo es de 2.*

También es posible en 6ª año/grado avanzar en el estudio de otras propiedades ligadas a la noción de divisor. Es el caso de *todo divisor de un divisor de un número es divisor de ese número,* que puede trabajarse a partir del juego siguiente:

“¿Es divisor de….?”: establecer la relación divisor del divisor.
Materiales: dos dados para cada pareja, dos tableros iguales, uno para cada jugador y fichas.

3	2	5	5	3	7	11
5	7	3	3	13	5	2
11	2	2	2	5	2	3
5	5	3	7	2	3	13
2	7	2	11	5	3	2
7	2	17	5	3	7	3
5	11	3	5	2	19	7

Organización de la clase: dividida en parejas.
Desarrollo: cada jugador tira primero un dado y luego otro que compondrá un número de dos cifras, considerando que el primer número que sale en el dado es el de las decenas.
El jugador elige una casilla desocupada en la que haya un divisor del número formado. Por ejemplo, si el número es 36, puede poner la ficha en el 3. Hace el cociente entre 36 y 3, es 12. Entonces busca un divisor de 12, por ejemplo 2 y pone allí otra ficha. Hace el cociente entre 12 y 2, es 6. Busca un divisor de 6, por ejemplo 3 y pone una ficha en él. Hace el cociente entre 6 y 3, es 2. Como ya puso una ficha allí, no agrega otra. Sigue así hasta que no encuentre más divisores. Entonces le toca el turno al otro jugador.
Si el número formado por las dos cifras resultara primo y el jugador se da cuenta, debe decirlo y puede tirar de nuevo los dados. Pero si no lo descubre, le tiene que ceder el turno al otro jugador. En cambio, si el jugador dice que el número es primo y no lo es, el contrincante podrá poner fichas en los divisores que descubra de ese número y a continuación le toca su turno.
Gana el jugador que logra completar una fila y una columna.

Con este juego se pretende que los alumnos utilicen estrategias propias para encontrar los divisores de un número. La discusión posterior al juego permitirá plantear las relaciones entre los números y divisores que los alumnos hayan utilizado. Esto quedará explícito cuando los ganadores cuenten cómo fueron encontrando los divisores. A partir de esos comentarios, podremos intervenir con preguntas tales como *Si un número tiene varios divisores, ¿es lo mismo elegir cualquiera? ¿Cuál conviene elegir primero?* De esta manera, los alumnos sacarán conclusiones y se aproximarán a formular la propiedad *Si 14 es divisor de 28 y 7 es divisor de 14, entonces 7 es divisor de 28.*

Como siempre que se plantea un juego, es interesante plantear problemas donde intervengan situaciones simuladas, como las siguientes.

- Javier y Sofía jugaron al juego de los divisores. Al tirar los dados, Javier obtuvo el 51, y dijo que es un número primo. Sofía dijo que no, y colocó fichas en el 3 y en el 17 ¿Quién de los dos tiene razón?

- En otra partida, Sofía había colocado fichas en las casillas que se muestran en la 2º columna y en la 3ª fila. ¿Con qué números podría completar las casillas que le faltan para ganar en sólo dos jugadas más? ¿y en una?

3	2 ●	5	5	3	7	11
5	7 ●	3	3	13	5	2
11	2 ●	2 ●	2 ●	5 ●	2 ●	3
5	5	3	7	2	3	13
2	7 ●	2	11	5	3	2
7	2	17	5	3	7	3
5	11 ●	3	5	2	19	7

También es importante que planteemos problemas extramatemáticos, donde los chicos puedan poner en juego las relaciones entre múltiplos y divisores. Estos son algunos ejemplos de situaciones problemáticas en diferentes contextos.

• El kiosquero de la escuela tiene 48 chupetines de leche y 30 de frutilla. Si quiere embolsarlos colocando en cada bolsa la misma cantidad, pero de modo que en cada un contenga la mayor cantidad posible, no se mezclen los gustos y no sobren chupetines. ¿Cuántos tiene que colocar en cada bolsa?

• Tres amigos Facundo, Romina y Federico ponen sus relojes en hora a las trece horas del día martes. Pero se sabe que el reloj de Romina adelanta 8 minutos, el de Federico adelanta 10 minutos y el de Facundo 12. ¿A qué hora de ese día volverán a tener la misma hora los tres? ¿Y del día siguiente?

• Don Juan, el dueño del kiosco de la esquina de la escuela, tiene una caja de bolitas. Aprovechando que se acerca el verano quiere prepararlas para la venta, para ello las quiere colocar en bolsitas que contengan la misma cantidad. Si coloca 2 en cada bolsita, le queda una suelta. Pero si coloca 3 en cada una le sobran 2. En cambio si coloca 4 les sobran 3. Al fin descubre que si coloca 5 no le sobra ninguna. ¿Cuántas bolitas había en la caja de Don Juan si se sabe que había más de 80 y menos de 100? Escriban cómo lo pensaron.

Otro tipo de actividades que resultan interesantes son aquellas en que se propone validar situaciones que han sido resueltas por otro. Estas situaciones favorecerán el desarrollo del pensamiento reflexivo, siempre que se planteen en relación a problemas que ponen en juego conocimientos sobre los que se está trabajando. Algunos ejemplos son los siguientes.

• Mayra y Luciana discuten acerca de los que les planteó la maestra. Mayra dice: *Si se suman dos números que son divisibles por 3, el resultado también es un número divisible por 3.* Luciana dice: *Si un número no es divisible por 6, entonces tampoco puede ser divisible por 2.*
¿Vos qué pensás acerca de lo que expresa cada una?

• En un grupo, los chicos discutían. María dijo: *Quiero encontrar un número que sea divisible por 8 pero que no sea divisible por 4.* Federico le contestó: *Yo creo que no lo vas a encontrar porque no hay.* Agustín dijo: *Yo creo que sí es posible que lo encuentre, porque yo encontré un número que es divisible por 4 y no lo es por 6: el 16.*
¿Qué pensás acerca de lo que discuten los chicos? ¿Quién tiene razón? Explicá tus respuestas.

> • Mariano dice: *Si 6 x 4 me da 24, eso significa que todos los múltiplos de 24, serán divisibles por 4 y también por 6.*
> ¿Es cierto lo que dice Mariano? ¿Hay números que sean divisibles por 4 y por 6 a la vez?

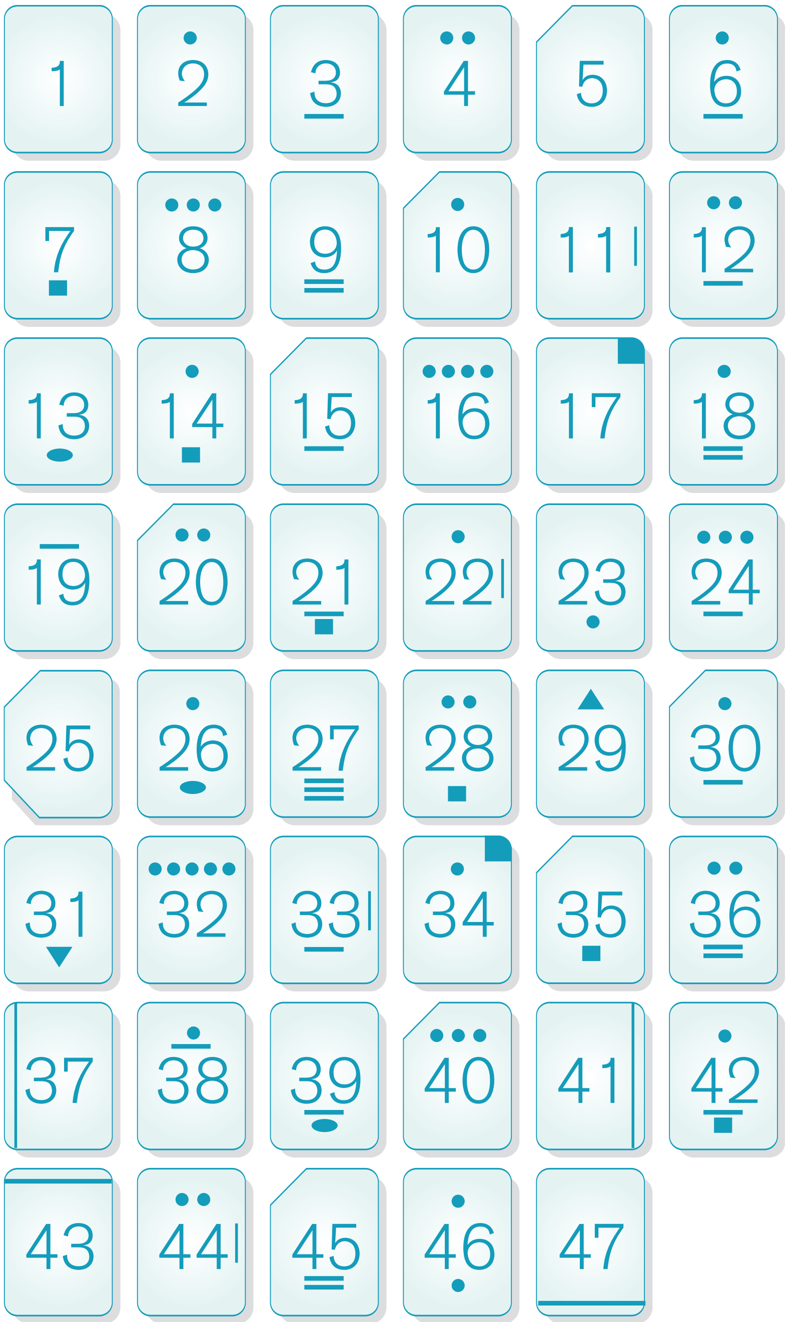
Proponer este tipo de situaciones en el aula favorece que los alumnos vayan reconociendo que la revisión y el análisis forman parte del quehacer matemático. Son recursos muy eficaces para que los alumnos busquen argumentos para validar mientras promovemos que actúen, hablen, registren, comenten o discutan sus producciones, lo que favorece sin duda la construcción del sentido.

Como ejemplo del trabajo con múltiplos y divisores ofrecemos una adaptación de una situación problemática diseñada por la profesora Esther Grossi[26]. Los alumnos de la clase se organizan en grupos de 4 o 5 integrantes, y se reparte en cada uno el mazo de cartas como el de la página siguiente. La actividad se inicia entregando un mazo de cartas con señales y se formula la consigna:

> • A cada mazo de cartas que les entregué se le ha perdido algunas cartas. Dado que es un mazo de 50 cartas, después de analizarlo, ustedes tienen que dibujar las cartas que faltan.

Cuando se propone esta situación en la clase, en general los alumnos comienzan ordenando las cartas por decenas. Con este ordenamiento empiezan a manifestar por ejemplo que *todas las cartas terminadas en 2, 4, 6, 8 tienen puntos.* También observan fácilmente que *a las cartas terminadas en 5 o en 0 les falta una esquina.* A medida que van encontrando estas regularidades, empiezan a realizar formulaciones, por ejemplo para construir la carta 48 dicen que *la carta no tiene una esquina cortada.* Saben que tiene que llevar puntos porque termina en 8 y discuten sobre la cantidad de puntos dado que también han observado que algunas cartas tienen uno, dos, tres y hasta cuatro puntos.

[26] La profesora e investigadora brasileña Esther Pilar Grossi fundó el Geempa, en Porto Alegre (inicialmente Grupo de Estudios sobre Enseñanza de las Matemáticas de Porto Alegre y actualmente Grupo de Estudios sobre Educación, Metodología de Encuestas y Acción). Realizó su Maestría en La Sorbonne y su Doctorado en Psicología de la Inteligencia en la École des Hautes Études en Sciences Sociales, Universidad de París (Francia). Se destaca por la búsqueda de soluciones para los grandes problemas de la escuela pública brasilera.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47

Otro procedimiento que suelen utilizar los chicos es apilar las cartas que tienen las mismas marcas, por ejemplo todas las que tienen puntos, todas las que tienen rayas debajo, o las que tienen figuras geométricas iguales, por ejemplo las que tienen cuadrados o triángulos o círculos. Esto hace que aparezcan algunas reflexiones como las siguientes:

–*Cada punto vale dos.* Y señalan las marcas sobre las cartas del 2, 4, 8, 16 diciendo *dos por dos, cuatro;* y luego *dos por dos, cuatro y por dos ocho.* En tanto que para el 16 dicen: *dos por dos, cuatro; por dos, ocho y por dos dieciséis,* y con el 32 confirman su regla.

–*Cada raya abajo del número es tres.* En la carta del nueve, señalan cada raya diciendo: *tres por tres es nueve.*

–*Mirá la del seis, tiene punto y raya abajo, entonces es como tener dos por tres, que es seis.* Y de manera análoga explican para los números 12, 18 y 24. En tanto que para la del 48 dicen: *la carta del 48 tiene una raya más que la del 24, es como la del 16.*

–*La del veinticinco tiene dos cortes, significa cinco por cinco, o sea que la del cincuenta tiene que ser con dos cortes y con punto.*

–*Los números que tienen un punto están en la tabla del dos, los números en las cartas con cortes están en la tabla del cinco, los que tienen raya abajo están en la tabla del tres.*

Luego de las discusiones y de encontrar algunas dificultades cuando tienen marcas diferentes, empiezan a observar las que solo tienen una marca y dicen:

–*La raya de abajo indica que son los de 3 en 3, el corte en la carta los de 5 en 5, el cuadrado lo tienen los que van de 7 en 7. La raya a la derecha la tienen los de 11 en 11. Los de 13 en 13, tienen un óvalo debajo, el cuadrado arriba a la derecha es el 17, etc.*

Luego conjugan algunas de estas afirmaciones y prueban con alguna de las cartas que tienen diferentes marcas, por ejemplo: *Mirá, el 14 es dos* (señalan el punto) *por siete* (señalan el cuadrado de abajo). De forma similar, ven si se cumple para el 10,12 y otros.

En los comentarios que realizan los chicos en sus grupos, se puede escuchar que algunos hablan de que la tabla sigue, es decir que se dan cuenta de que los números de la tabla del 2, por ejemplo siguen de 20, porque 22, 24,26, etc., tienen el mismo símbolo.

Es importante que en el momento de la discusión permitamos que los alumnos expliciten los diferentes procedimientos y las respuestas encontradas. Este será el momento en el que podremos recuperar lo que ha surgido en los grupos y decidiremos sobre qué discutir: si aquello que los alumnos han puesto en juego acerca de los conjuntos de múltiplos o acerca de los factores primos de un número.

El desarrollo de la actividad nos permite observar cómo los alumnos, aún sin utilizar un lenguaje adecuado, nos muestran que tienen muchos conocimientos acerca de factores y múltiplos. Por eso es esencial que en el cierre de la clase recuperemos esos conocimientos e introduzcamos los términos apropiados de aquellos conceptos que adquirieron significado para los alumnos.

También es interesante organizar la clase para que en algunos grupos falte el 48 y en otros el 50, de tal manera que se involucren diferentes números, o proponer a los alumnos que confeccionen otras cartas (60, 61...) para ampliar el mazo. Si proponemos, por ejemplo que diseñen la carta número 47 suelen aparecer dificultades, ya que por ser primo deben inventar una nueva marca.

Para avanzar en los procedimientos de cálculo con distintos tipos de números

Concebimos el cálculo mental como un conjunto de procedimientos no algorítmicos para encontrar resultados de cálculo que se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las leyes que rigen el funcionamiento de las operaciones.

La característica principal es la de ser un cálculo pensado, reflexionado, independientemente de que pueda ser un cálculo realizado con lápiz y papel y de que sea más rápido que la aplicación del algoritmo. La posibilidad de plantear el uso o no del papel como soporte del cálculo pensado, puede ser una variable didáctica que proponga el docente. Podríamos decir que en el cálculo mental pensado:

- existen muchas técnicas o procedimientos entre los que hay que elegir el que mejor se adapte,
- varía de una persona a otra,
- hace un uso más explícito y conciente de las propiedades,
- logra que los alumnos dispongan de la traza de la red de relaciones entre los conceptos que usan, lo que permite una mejor movilización de los mismos,
- permite la anticipación de un resultado y provoca una vigilancia conciente sobre el error en situaciones de estimación y aproximación.

En el cálculo algorítmico, en cambio, se observa que el funcionamiento es homogéneo, igual en cada individuo, las propiedades aparecen en forma implícita (no es fácil el reconocimiento de las mismas), es más tranquilizador, pero cuando hay errores, son más difíciles de detectar.

El cálculo mental y el cálculo algorítmico son dos formas de calcular que deben interactuar y complementarse, si se quiere asegurar un buen dominio del cálculo. Como se explicó en *Cuadernos* anteriores, un objetivo de la enseñanza del cálculo mental es que el alumno se apropie de los conocimientos necesarios, para que, de forma autónoma, pueda elegir procedimientos apropiados, encontrar resultados y juzgar la validez de las respuestas.

Si las actividades se orientan a lograr mayor fiabilidad de los resultados, llegará el momento en que el cálculo algorítmico o con calculadora puede ser "supervisado" por el cálculo mental. Es importante que los alumnos aprendan a evaluar en qué casos es conveniente usar la calculadora, en qué casos pueden resolver la operación mediante cálculos mentales y en qué casos conviene usar los algoritmos usuales.

La capacidad de los alumnos para resolver problemas diversos depende, en parte, del dominio progresivo de recursos de cálculo. Para favorecer tal dominio, es necesario que planteemos un trabajo ya sea a partir de procedimientos para resolver problemas o bien de actividades específicas del campo numérico. Numerosas investigaciones muestran la posibilidad que tienen los niños de crear estrategias de cálculo, pero es importante que el desarrollo del cálculo mental no quede sólo bajo la responsabilidad del alumno.

El conocimiento de una mayor cantidad de relaciones numéricas facilita el cálculo mental, pero a su vez el planteo de actividades para cálculo mental permite desarrollar el conocimiento de las relaciones y propiedades. Como ya hemos dicho, el cálculo puede ser trabajado desde diversas situaciones problemáticas ante las cuales los alumnos pueden usar diferentes procedimientos. La propuesta es tomar estos procedimientos como objetos de trabajo, compararlos, mejorarlos y también vincularlos con los algoritmos convencionales.

Son muchas las situaciones vinculadas al cálculo mental: la estimación de los gastos de una compra de supermercado para no exceder el dinero que se quiere gastar, el cálculo de los ingredientes de una receta para el doble de personas, la decisión para comprar o no una oferta, el redondeo de precios y situaciones vinculadas específicamente con las propiedades y relaciones entre los números.

Los avances en el estudio de los números y las operaciones en los campos natural y racional, requieren establecer relaciones multiplicativas entre números. La construcción de estas relaciones (repertorio multiplicativo) se inicia en el Primer Ciclo y debe continuar en el Segundo Ciclo. Construir el "repertorio" significa no sólo memorizar, sino también trabajar sobre las propiedades, establecer relaciones, organizar resultados, analizar la pertinencia de los mismos según la situación etc. Dentro de las relaciones que los chicos necesitan disponer, además de las "tablas" hasta el nueve, se incluyen, entre otras, las multiplicaciones y divisiones por la unidad seguida de ceros y las propiedades de las operaciones (asociativa, conmutativa y distributiva). Estas relaciones son particularmente útiles para la aproximación de productos y para la estimación de cocientes.

El trabajo que proponemos implica promover en nuestros alumnos la utilización de diversos procedimientos de cálculo favoreciendo la discusión, la justificación de opciones, el esfuerzo por lograr formulaciones adecuadas. Al organizar la puesta en común, tendremos en cuenta los siguientes aspectos:

- coordinar que los alumnos expliciten los procedimientos utilizados, tanto los correctos como los incorrectos,
- favorecer la comparación de diversas estrategias y el análisis de los errores,
- promover la invención de nuevas estrategias entre los alumnos.

Plantear situaciones para elaborar y comparar diferentes procedimientos de cálculo

Muchas veces, frente a un problema de cálculo que se presenta fuera de la escuela, hemos escuchado a un niño que dice: *no puedo hacer esta cuenta, porque todavía no me enseñaron a multiplicar decimales.* Desde la perspectiva que se sostiene en estos *Cuadernos*, no se pretende que los alumnos aprendan algoritmos que se aplican mecánicamente, sino que, frente a un desafío de cálculo, y en función de los números involucrados, puedan elegir una estrategia que resulte útil para resolverlo apoyándose en los conocimientos que ya tienen. Ahora bien, para que esto sea posible, es necesario ofrecer situaciones que permitan construir un repertorio de propiedades y resultados memorizados con los que se pueda contar. En este sentido, habrá que dar oportunidades para utilizar **escrituras equivalentes de un número**, dobles, mitades y **complementos para llegar al entero más próximo de expresiones decimales y fracciones.**

Comparar procedimientos propios con los de otros niños, o con alguno presentado por nosotros, permitirá tomar distancia de la urgencia por hallar el resultado y analizar para explicitar las propiedades que los sostienen. Este tipo de trabajo permitirá, luego, sistematizar las distintas estrategias de cálculo, entre las que se podrán incluir los algoritmos tradicionales.

En relación con el repertorio aditivo, podrán proponerse, entre otras, actividades como las siguientes.

• Completá haciendo cálculos mentales:

a) 1, 06 + ... = 1,12
b) 1,05 + ... = 1,1
c) 2,30 + ... = 3
d) $\frac{3}{4}$ + ... = 2
e) $\frac{3}{4}$ + ... = $1\frac{1}{4}$

• Sin escribir ninguna cuenta, decidí cuánto hay que agregar o quitar al número de la izquierda para que se verifique la igualdad.

5,21 _____ = 5,31	1,97 _____ = 1
10 ____ = 9,991	1,97 _____ = 0,06
$\frac{1}{4}$ _____ = 2	1,97 _____ = 0,9

• Respondé y justificá respuestas:
a) ¿Cuántas centésimas hay que sumar a nueve décimas para obtener la unidad?
b) ¿Qué resultado se obtiene si a 0,8 le sumamos 0,20; 1; 0,28; 0,10 ó 1,00?

En el análisis de las situaciones anteriores pondremos de manifiesto la relación de equivalencia entre unidad, décimos, centésimos y milésimos y la reconstrucción de la unidad a partir de adicionar o quitar. Por ejemplo, en la consigna b) del primer problema, es importante discutir sobre la equivalencia entre décimos y centésimos, ya que hay que agregar 5 centésimos y el resultado está expresado en décimos.

En la consigna c) del primer problema, se puede descomponer 2,30 y pensar que a treinta centésimos le faltan setenta centésimos para formar una unidad más. Este modo de pensar también es útil para alumnos que, acostumbrados a aplicar el algoritmo tradicional, se equivocan cuando encolumnan.

Para $\frac{3}{4}$ + ... = 2 los alumnos podrían, por ejemplo, afirmar que *tres cuartos y un cuarto más es uno, así que hay que agregar uno y un cuarto* apoyándose sobre la reconstrucción del entero o sobre las relaciones de equivalencia: *dos es ocho cuartos, que menos tres cuartos dá cinco cuartos.*

En el caso e) del primer problema, podrían aparecer estrategias que permitan discutir sobre el significado de la fracción mayor que la unidad expresada como número mixto o sobre ciertos cálculos que combinen la descomposición del número con fracciones equivalentes convenientes, tal como se expresa en el siguiente diálogo.

Luego de resolver estas actividades, es conveniente indagar si estas estrategias pueden usarse en otros casos. Por ejemplo, plantear de qué modo conviene descomponer para resolver 7, 05 – 4,98 ó $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}+2$.

En las actividades siguientes, se pretende que los alumnos puedan encontrar el resultado de multiplicaciones que no han resuelto antes, estableciendo relaciones con un cálculo del que se conoce el resultado.

• Conociendo que 4 x 2,5 = 10, elegí el o los resultados que consideres correctos y justificá:

a) 2 x 2,5 =	4,10	5	$\frac{50}{10}$;		
b) 40 x 2,5 =	82,0	100	10	$\frac{100}{10}$	
c) 0,2 x 2,5 =	0,410	0,05	0,50	$\frac{50}{10}$	$\frac{50}{100}$
d) 4 x 0,25 =	10	1	100	0,100;	
e) 0,4 x 0,25 =	10	1	0,010	0,01	

• Sabiendo que 2,4 x 1,5 = 3,6 resolvé las siguientes operaciones haciendo cálculos mentales. Después controlá tus resultados usando la calculadora.

2,4 x 0,75 =	2,4 x 4,5 =
4,8 x 0,75 =	4,8 x 1,5 =

• Seleccioná las operaciones cuyo resultado sea 25,75. Justifica en cada caso.

$25+\frac{75}{1000}=$ 0,2575 x 100 = 257,5 x 0,1 = $25+\frac{3}{4}=$ 257,5 : 10 =

En la puesta en común, promoveremos que los alumnos formulen sus estrategias y los modos de verificar los resultados y puedan registrar las propiedades que se han puesto en juego. Por ejemplo: *si uno de los factores se duplica el resultado dado también se duplica.*

Las situaciones en las que se trata de determinar la validez de las afirmaciones producidas por otros, promueven en los alumnos la búsqueda de argumentos y justificaciones muy valiosas a la hora de establecer relaciones y formular conclusiones.

Estas son algunas propuestas.

• En un grupo, los chicos discuten sobre cuál es el mayor de estos dos números: 4,15 ó $\frac{17}{4}$.

Analía dice: *Yo pensé que 17 : 4 es igual a* $\frac{16}{4} + \frac{1}{4}$ *y eso es 4 + 0,25 o sea* $\frac{17}{4}$ *es igual que 4,25, que es mayor que 4,15.*

Pablo explica: *Yo hice 4,15 =* $\frac{415}{100}$ *y* $\frac{17}{4} = \frac{425}{100}$*, por lo tanto este es el mayor.*

Belén afirma: *Yo dividí 17 : 4 y eso me dio 4,2... y no seguí porque ese dos ya me dice que este número es mayor que 4,15.*

¿Cuál de estos razonamientos creés que es correcto? ¿Por qué?

Es importante que recuperemos las nociones que se usaron en estos razonamientos: equivalencia de fracciones, comparación del valor de las décimas en una expresión decimal, descomposición de una fracción mayor que la unidad en fracciones equivalentes, utilizando la fracción equivalente a números naturales.

Con una estructura similar, la actividad siguiente permitirá usar expresiones equivalentes $\frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100}$, multiplicar y dividir por la unidad seguida de ceros y argumentar sobre la equivalencia entre dividir por 10 o multiplicar por 0,1.

• ¿Estás de acuerdo con las siguientes justificaciones que hicieron algunos chicos para decir que 257,5 x 0,1 = 257,5 : 10?

Marcela: *257,5 x 0,1 y 257,5 : 10 son equivalentes, porque multiplicar por un décimo es lo mismo que dividir por 10.*

Adrián: *257,5 x 0,1 y 257,5 : 10 son lo mismo, porque en la primera multiplico por uno y me da el mismo número, y después pienso qué décimo por décimo me da centésimo en el denominador y eso es* $\frac{2575}{10} x \frac{1}{10}$.

Olivia: *En el segundo veo 257,5 x 1:10, y 257,5 es el primer número y (1: 10) = 0,1 como en el primero, entonces me da el mismo resultado.*

• ¿Qué conocimientos usaron los chicos que hicieron estas justificaciones?

En estas actividades, las descomposiciones y escrituras equivalentes de los números y las propiedades de las operaciones permiten controlar la validez de los resultados que se obtienen. La posibilidad de avanzar en la sistematización de estrategias de cálculo para multiplicar y dividir fracciones y expresiones decimales requerirá además, pensar las fracciones como cocientes y recuperar la idea de "parte de parte". Así, en la actividad anterior, un alumno puede asegurar que décimo por décimo da centésimo, porque piensa en la décima parte de la décima parte.

De modo análogo, para calcular $\frac{3}{4}$ x $\frac{5}{6}$ los alumnos pueden descomponer en 3 x $\frac{1}{4}$ x 5 x $\frac{1}{6}$, fracciones verticales conmutar y pensar en la sexta parte de la cuarta parte de tres por cinco. En este caso, algún alumno podría pensar que la cuenta no se puede hacer, porque la cuarta parte de quince no da justo, lo que llevará a expresar el resultado como $\frac{1}{24}$ x 15 $= \frac{15}{24}$, volviendo una vez más sobre la idea de fracción como cociente. Este mismo tipo de razonamiento permite avanzar en la multiplicación de expresiones decimales.

Plantear situaciones para sistematizar estrategias de cálculo

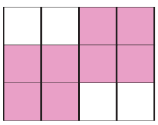
Tal como ya señalamos en el apartado anterior, para lograr que los alumnos comprendan algunos de los algoritmos usuales, es esencial que propongamos problemas de exploración en los que utilicen diferentes procedimientos para poner en juego las propiedades de los números y de las operaciones. Este trabajo es posible si los alumnos se han habituado a utilizar cálculos mentales, a elegir entre diversos procedimientos, a disponer de diferentes recursos de estimación y control de los resultados de las operaciones y a usar la calculadora.

Este proceso de resolución y análisis por parte de los alumnos contribuirá al progreso de la utilización de estrategias más económicas de cálculo y a su sistematización. Las cuentas se convierten así en objeto de reflexión y estudio compartido en el aula y en este trabajo se negocian los avances y se realizan acuerdos tendientes al dominio de algunos algoritmos.

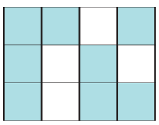
A continuación, se transcribe una secuencia de actividades en la que un grupo de alumnos de 6° grado inició el trabajo comparando distintas formas de escribir $\frac{8}{12}$ para terminar acordando una regla para **sumar fracciones**.

Inicialmente, a cada grupo se le entregó una hoja donde aparecía un rectángulo con una parte pintada y un papel afiche para registrar las producciones, con la siguiente consigna: *Expresar la parte sombreada mediante fracciones y operaciones entre fracciones (no está permitido hacer nuevas divisiones).*

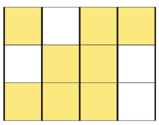
Grupo 1



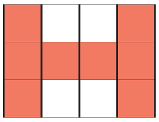
Grupo 2



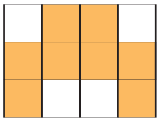
Grupo 3



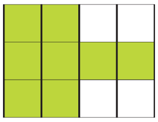
Grupo 4



Grupo 5

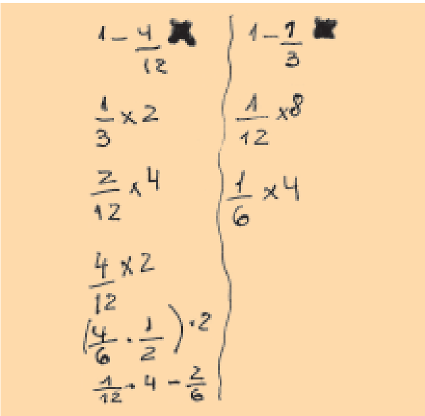


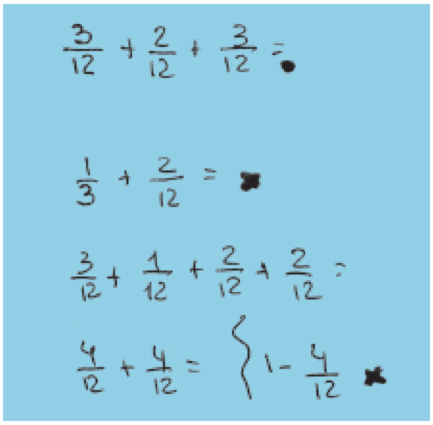
Grupo 6

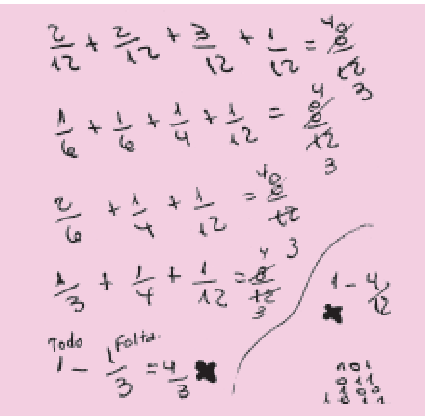


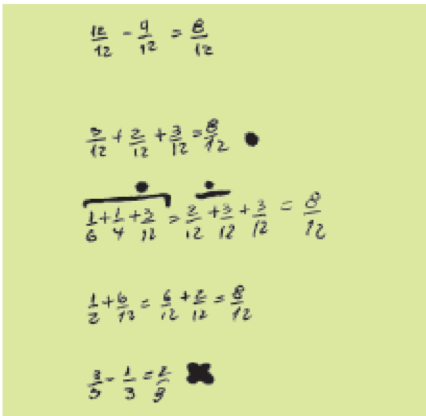
Cuando el maestro consideró que el tiempo trabajado era suficiente, unos quince minutos, les pidió a los grupos que expusieran la hoja con la parte sombreada y el afiche con los registros de las producciones. Luego observaron y registraron semejanzas, diferencias, aciertos y errores de las diferentes producciones y se fue discutiendo y reelaborando lo trabajado en los pequeños grupos.

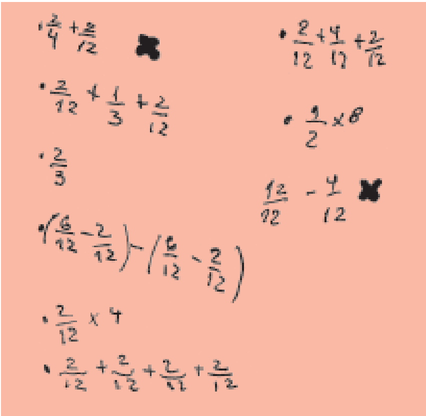
A modo de ejemplo, se transcriben algunas producciones y expresiones de los alumnos.

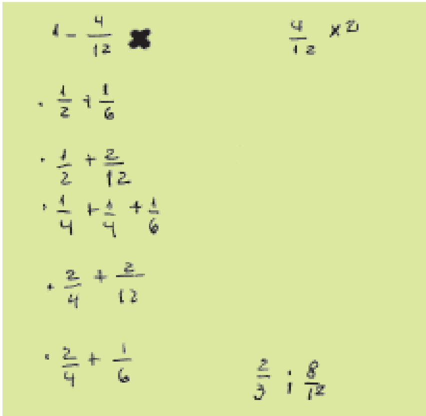








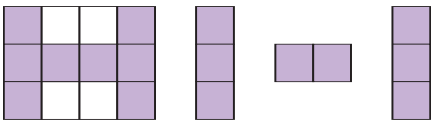




- *Las operaciones que más aparecen en primer lugar son sumas, luego restas.*
- *En todos los gráficos se pintó ocho doceavos.*
- *El resultado de todas las operaciones que aparecen debe dar ocho doceavos, si no da es porque hay algo mal.* (Algunos alumnos identifican $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ como erróneo, ya que no ven la equivalencia entre $\frac{8}{12}$ y $\frac{2}{3}$)
- *Las sumas de denominador doce son las que más aparecieron porque son más fáciles.*

En general, el orden en el que aparecían las fracciones escritas y las operaciones, estaba muy condicionado por cómo estaban dispuestas las partes sombreadas. Es más, cuando se comentó que en ningún afiche aparece $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$, los alumnos argumentaron que es válido, pero que es más cómodo asociar. Otros niños afirmaron que en las partes pintadas no se veía eso, *porque los cuadraditos están pintados juntos.*

$$\frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12}$$



También se discutieron otras cuestiones, ligadas al vínculo entre el cálculo y el gráfico:

–Nos parece que algunas cuentas las ponen para que les dé ocho doceavos y que no tienen relación con lo pintado como ($\frac{4}{6}$. $\frac{1}{2}$) . 2. ¿Para qué sacan la mitad si luego multiplican por dos?

Disponer de un repertorio de distintos cálculos de los que se sabe el resultado permite analizarlos y establecer relaciones entre los numeradores y denominadores. De las producciones presentadas por los grupos y de los aportes realizados en plenario, el docente fue rescatando aquellas preguntas y afirmaciones que consideró más potentes para avanzar hacia la sistematización de las estrategias de cálculo que se explicitaron. A modo de ejemplo se transcriben algunos registros de lo ocurrido en clase.

Registro de clase

Docente: *–¿Por qué les parece que la suma de fracciones es la operación que más aparece?*
(Los alumnos comentan en pequeño grupos y luego se da el espacio para que un representante del grupo, elegido por la docente, exponga la respuesta.)
Alumno del grupo 1: *–Porque es más fácil ir tomando partes e ir agregando otras y luego sumarlas, que pensar en un todo y luego quitar lo que no está pintado.*
Alumno del grupo 2: *–Porque las sumas con denominador 12 son más fáciles porque se suman los numeradores*
Alumno del grupo 3: *–Porque si tomamos todas las de igual denominador, que representan todas las partes iguales, se suman la cantidad de partes iguales por eso este tipo de sumas son las que más aparecen.*
Alumno del grupo 4: *–Algunos ejemplos están repetidos en los afiches y faltan otros que también podrían ser ejemplos. Solo hace falta asociar o disociar.* (Escribe $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} =$ en el pizarrón.)
Docente: *–Registren en sus carpetas 6 o más sumas de igual denominador.*
(Durante el trabajo individual, aunque físicamente sentados en grupo, se observa que algunos chicos copian los ejemplos que están en los afiches, otros inventan nuevas sumas, controlando que el resultado sea $\frac{8}{12}$ y en un grupo se escuchan estos comentarios.)
Alumno 1: *–Es más fácil inventarlas que copiarlas del pizarrón.*
Alumno 2: *–Sí, las de igual denominador.*
Alumno 3: *–Hay que poner* $\frac{...}{12} + \frac{...}{12} + \frac{...}{12} + \frac{...}{12} = \frac{8}{12}$ *dos, tres, cuatro sumandos y luego poner los numeradores a cada uno para que te de 8.*
Alumno 4: *–Yo puedo simplificar el* $\frac{8}{12}$ *y me da igual a* $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$, *no tiene denominador 12.*
Alumno 3: *–Te da de igual denominador que se puede simplificar o no. Si te pinto siete doce, no se puede simplificar y te queda de igual denominador. Si todas las fracciones tienen igual denominador, sumás los numeradores y listo. Si te da una suma que da* $\frac{12}{12}$, *el resultado simplificado te da 1, uno no es una fracción, pero se lo puede escribir como fracción* $\frac{12}{12}$.

(En otro grupo se escuchan estos comentarios.)
Alumno 5: –*Si todas tienen igual denominador se suman los numeradores y listo.*
Alumno 6: –*Claro porque cuando el denominador es igual es porque la parte que representa es igual y entonces se puede sumar los numeradores que indican cuantos de esas partes hay.*
Alumno 5: –*¿Y cuánto me da, como en aquel caso, que tienen distintos los denominadores?*
Alumno 6: –*Escribís en lugar de esas las fracciones que son equivalentes a esas, hasta tener a todas de igual denominador.*
Docente: –*Vamos a recuperar el trabajo que acaban de hacer. Mientras ustedes trabajaron, yo fui escuchando comentarios interesantes y quiero someterlos a discusión. Si las fracciones que se suman tienen el mismo denominador, el resultado, ¿tiene que expresarse con ese denominador? ¿puede escribirse de otra manera? Es más, ¿puede no ser una fracción?*
(En plenario se acuerda que: *para sumar fracciones es necesario que todas tengan el mismo denominador, porque eso significa que las partes son iguales. Entonces, se suman los numeradores y el resultado se puede escribir con una fracción de igual denominador, o con otra equivalente de distinto denominador o ser un número entero que también se lo puede expresar como fracción.* El docente pide que escriban las conclusiones en las carpetas y, a continuación, que agregaran los ejemplos.)

En otra clase, el docente propuso avanzar un poco más retomando algunas preguntas que habían surgido sobre cómo operar cuando las fracciones no tienen el mismo denominador.

Después de acordar en sus grupos de trabajo, los alumnos expusieron sus conclusiones.

Registro de clase

Alumno 1: –*Si las fracciones son de distinto denominador, hay que hacer otro paso más para hallar las equivalentes a las otras.*
Alumno 2: –*Se busca el común denominador, se escriben las fracciones equivalentes a cada una de ellas, y al final cuando todas tienen igual denominador recién se suman los numeradores.*
Alumno 3: –*En ese caso hay que encontrar fracciones equivalentes a las dadas, todas de igual denominador.*
(Otros alumnos manifiestan acuerdos, con las expresiones anteriores.)
Docente: –*Registren en sus carpetas al menos seis de las sumas que están en los afiches que tienen distinto denominador y expliquen por*

escrito cómo se puede realizar la cuenta cuando no se conoce el resultado.
(Dos alumnos que "inventaron otras", las escribieron en el pizarrón para que todos pudieran resolverlas.)

En clases posteriores, se siguió trabajando con preguntas como: *Si los siguientes números son denominadores de distintas fracciones: 6, 12, 24, 36, 96. ¿Cuál es el denominador común que eligen? ¿Por qué ese y no otro?* En este proceso, que llevó casi una semana de trabajo, los alumnos fueron acercándose al algoritmo de manera reflexiva, apoyándose en sus conocimientos anteriores, lo que resulta fértil tanto en términos del tipo de trabajo matemático que se realiza como de la disponibilidad de distintas estrategias de cálculo.

Otra actividad para analizar distintas estrategias de cálculo y compararlas con los algoritmos usuales, es pedir a los alumnos que elaboren un mensaje que dé cuenta del procedimiento utilizado para resolver un cálculo. Cada grupo de alumnos recibe una tarjeta con una cuenta y deben decidir entre todos cómo escribir un mensaje para que otro grupo pueda hacer esa cuenta siguiendo el mismo procedimiento.

Es importante destacar que debemos armar las tarjetas teniendo en cuenta las estrategias que han utilizado los alumnos en otras oportunidades y las propiedades que conocen, pero también debemos incluir nuevas escrituras o modos de organizar el cálculo para generar un problema. En este caso, mostramos ejemplos de tarjetas preparadas para analizar la **multiplicación entre expresiones decimales.**

GRUPO A

0,25 x 48 =	
0,25 x 4 = 1	1 x 10 = 10
0,25 x 4 = 1	1 x 2 = 2
Resultado de la cuenta: 12	

GRUPO B

0,25 x 48 = 0,5 x 0,5 x 2 x 3 x 2 x 4
0,5 x 2 x 3 = 3
0,5 x 2 x 4 = 4
3 x 4 = 12
Resultado de la cuenta: 12

GRUPO C

0,25 x 48 =

$\frac{25}{100} \times 48 = \frac{(25 \times 48)}{100}$

25 x 4 x 10 = 100 x 10 = 1000

25 x 4 x 2 = 100 x 2 = 200

$\frac{1200}{100} = 12$

GRUPO D

0,25 x 48

$\frac{1}{4} \times 48 = 48 \times \frac{1}{4} = 48 : 4 = 12$

GRUPO E

0,25 x 48 =

$\frac{25}{100} \times 48 = \frac{(25 \times 48)}{100}$

25 centésimos
x 48
200
100
1200 centésimos = 12

Las estrategias que se muestran arriba se basan en la descomposición en factores y la aplicación de las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación. En la estrategia que se propone al grupo se recupera la posibilidad de analizar la equivalencia entre 0,25 y $\frac{1}{4}$ aplicar luego la conmutatividad de la multiplicación y reconocer la fracción como el cociente y en el caso del grupo. El procedimiento utilizado es prácticamente el algoritmo convencional.

Si la idea de parte de parte está disponible, la multiplicación entre dos expresiones decimales no presentará dificultades, pues los alumnos ya han discutido antes que, por ejemplo, la décima parte de la centésima parte en la milésima parte y, por lo tanto:

6,4 x 4,25 =
64/10 x 425 /100 = 1/10 x 64 x 1/100 x 425 =
1/10 x 1/100 x 64 x 425 = 1/1000 x 64 x 425 = 64 x 425 : 1000

En el caso de los **algoritmos para la división,** si se recupera la idea de divisiones equivalentes, no hace falta diferenciar los casos en los que el dividendo, el divisor, o ambos, son enteros o decimales. Solo basta con transformar el dividendo y el divisor, de modo de obtener una división equivalente con divisor entero.

Es decir, una vez más, la técnica experta y general se presenta como el cierre de los aprendizajes obtenidos a partir de todo un proceso de enseñanza que dura varios años y que, en este caso, se ha iniciado en 4° año/grado con los números naturales.

Para trabajar con la información

En este apartado, incluimos propuestas que toman la idea de tratar la información desde una perspectiva amplia que implica no sólo cómo trabajar con los datos, sino también como obtener, organizar y representar conjuntos de datos.

En principio, y como ya se ha expresado en *Cuadernos* anteriores, cada vez que se resuelve un problema se trata información. Por lo tanto, el análisis de los datos en un contexto es un aspecto propio de la resolución del problema, así como el modo en que éstos se presentan (con enunciado verbal, gráficos o tablas), selección de incógnitas, número de soluciones (una, varias, ninguna, etc.). En este sentido, la variación en la presentación y en las preguntas asegura una mejor posibilidad de resolución de situaciones fuera de la escuela, pues en general, los problemas que se deben resolver en estos casos, no se presentan con un enunciado. Además, modificar la tarea que debe realizar el alumno, también adecua la forma de trabajo de las situaciones con su tratamiento fuera de la escuela. Por ejemplo, muchas veces, para una cierta pregunta, no tenemos toda la información que permite elaborar su respuesta.

Por otra parte, en el Segundo Ciclo las actividades ligadas a la obtención, organización y representación de conjuntos de datos enfrentan a los chicos con nociones que luego invertirán al estudiar estadística.

Estas actividades, ya propuestas para años anteriores, comienzan con la interpretación de tablas y gráficos ya confeccionados, proponiendo luego pasar la información de una forma de presentación a otra incluyendo tablas, gráficos de barras y pictogramas. Estas representaciones permiten, con una sola mirada, establecer relaciones de proporcionalidad entre los elementos intervinientes en una situación determinada, asociándola visualmente con alguna característica de los mismos. En este año/grado, se podrá incluir también la interpretación de gráficos circulares sencillos.

Los procedimientos que cuentan con el recuento de objetos (diagramas de árbol, tablas de frecuencia...) y las formas de agruparlas o combinarlas (permutaciones o combinaciones) pueden ser trabajadas por los alumnos a partir de situaciones que promuevan ese tipo de procedimientos, sin entrar en las definiciones formales de conceptos de estadística o de probabilidad.

Plantear situaciones para establecer relaciones entre datos e incógnitas

Una tarea interesante es la producción de problemas a partir de diferentes informaciones. Así, cuando un alumno produce un problema o lo transforma, incluyendo otros datos o ideando posibles preguntas, intervienen en el proceso tanto su posibilidad de interactuar con la información como el sentido matemático que le otorga a las nociones involucradas en el contexto planteado.

Por ejemplo, podríamos dar informaciones con referencia a un contexto y pedir a los chicos que formulen preguntas que se puedan responder con esos datos. También podemos ofrecerles cálculos realizados con algunos datos aportados por el contexto elegido y que ellos deban responder, si es posible, utilizando la información brindada o buscando nueva información.

• Alicia quiere comprar una caja de sopa instantánea y encuentra en la góndola del supermercado dos del mismo gusto con información diferente. Lee las fechas de vencimiento y encuentra que ambas están en condiciones, pero al compararlas supone que la caja B fue elaborada con posterioridad a la caja A. Respondé a las preguntas que se hace Alicia.

CAJA A	
Contenido: 5 sobres de 10 g	
Información nutricional	
Valor energético (en kilocalorías)	29
Proteínas (en g)	0,5
Glúcidos (en g)	5,5
Lípidos (en g)	0,6
Fibra alimentaria (en g)	0,8

CAJA B	
Contenido: 5 sobres de 11 g	
Información nutricional	
Valor energético (en kilocalorías)	33,2
Proteínas (en g)	0,94
Glúcidos (en g)	6,28
Lípidos (en g)	0,46
Fibra alimentaria (en g)	0,85

a) Al comparar el contenido de un sobre de ambas cajas, Alicia ve que los de la caja B contienen 1 g más, y que las calorías pasaron de 29 a 33,2 y piensa: *¿es verdad que el peso aumentó en un 10 %?*
b) Alicia sigue leyendo y se pregunta: *¿las calorías aumentaron en la misma proporción? ¿y los otros componentes?*
c) En la caja A, se informa que la sopa reúne el equilibrio nutricional propuesto por la pirámide alimentaria. Conseguí la información que necesites para analizar si esa información es cierta.
d) ¿Sería posible incluir esa información en la caja B?

En este caso, las preguntas son variadas y requieren que los alumnos realicen distintos trabajos, como analizar la validez de una afirmación, dar una respuesta aproximada, buscar información adicional. También es posible realizar una actividad similar, a partir de los prospectos de medicamentos, como se presenta a continuación.

• El médico le ha dado a Ignacio el siguiente recetario con las respectivas indicaciones. ¿Son suficientes las cajas indicadas en el recetario?

Rp/
Sr: Juan Ignacio Rodríguez
Asociado Nº:

- Miclocatil
1 caja de 10 cápsulas

- Diroxilacid supositorios (125 mg)
1 caja de 20 unidades

- Prednisonil (5 mg)
3 cajas de 15 comprimidos/caja

Robles
"AMADEO ROBLES"
20/5/06

Dr. Amadeo Robles
Médico clínico

Paciente: Juan Ignacio Rodríguez

Indicaciones:

1. - Miclocatil
2 cápsulas diarias durante 7 días

2. - Diroxilacid supositorios
1 al acostarse durante 1 semana

3. - Prednisonil (5 mg)
1 pastilla en el desayuno, 1 en el almuerzo y 1 en la cena durante 15 días.

En este caso, se hace necesario comparar información a través del cálculo para decidir una respuesta que no es numérica (alcanza, no alcanza, alcanza justo etc.), es decir hace falta contextualizar en la situación los resultados numéricos. Otro análisis interesante sería averiguar cuáles son los datos irrelevantes, para dar respuesta a la pregunta planteada (125 mg; 5 mg).

Como hemos planteado en *Cuadernos* anteriores, también es importante presentar problemas donde la pregunta tiene más de una respuesta, para que los chicos no construyan la idea de que un problema tiene siempre una única solución.

Para iniciar a los alumnos en un trabajo de **probabilidad**, es posible proponer un juego como el siguiente y promover luego el análisis de datos y la extracción de inferencias.

"¿Qué sumas me convienen?": armar conjeturas a partir de datos.
Materiales: cada grupo contará con un par de dados y una cuadrícula como la siguiente.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12.

Organización de la clase: grupos de 4 o 5 integrantes.
Desarrollo: antes de comenzar a jugar, cada alumno elegirá dos columnas encabezadas por un posible resultado de la suma de ambos dados. Los números que no hayan sido elegidos por los alumnos serán representantes de "jugadores fantasmas" y se marcará un punto en el cuadrito respectivo cada vez que salgan esos números.
A su turno, cada jugador tira los dados y canta la suma obtenida. El integrante que eligió dicha columna pinta un cuadradito.
Gana el jugador cuyo número haya completado las 10 casillas de su columna.

Luego de jugar, promoveremos que los alumnos, mirando los distintos tableros completos del juego, respondan a la pregunta *Si ahora volviéramos a jugar, que números elegirían*. Es probable que al comparar los diferentes tableros se observe que en general ganan las sumas que dan 6, 7 y 8.

A continuación transcribimos un fragmento de una clase y algunas expresiones que aparecieron en la puesta común luego que el docente preguntara: *¿Por qué creen ustedes que en muchos grupos ganaron las sumas, 6, 7 y 8?*

Registro de clase

Javier: –*Yo elegí el 2 y sólo esperaba que saliera el 1 + 1, en cambio él eligió el 6 y tenía más suerte porque le podía salir 3 + 3, 4 + 2 o 5 + 1.*
Sandra: –*Porque siempre tiraba Juan.*
Docente: –*Pero... ¿En los demás grupos, tiraban otros chicos?*
Alumno 3: –*Porque tiramos pocas veces....*
Docente: –*Podríamos jugar a tirar más veces... pero por ejemplo miremos en todos los cuadros, si sumáramos las tiradas de todos los grupos vemos que el dos salió mucho menos. Pensemos en el argumento que dijo Javier y discutan con sus compañeros ¿Cuántas sumas pueden dar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ,11 y 12?*
(En el trabajo de los pequeños grupos se escuchan breves diálogos como las siguientes.)
Alumno 1: –*Nos conviene 6, 7, 8 porque tenés tres sumas que dan 6, tres que dan 7 y tres que dan 8.*
Alumno 2: –*Sí, pero puede ser que no te salga.*
Alumno 3: –*Entonces, cuanto más grande, tenés más posibilidades de que te salga.*
Alumno 4: –*¡No! El dado tiene hasta 6.*
Alumno 3: –*A nosotros nos salió muchas veces 6 + 6... ¡eso fue suerte!*
Alumno 4: –*Sí, pero si elegís primero, ¿elegís el 12?*
Alumno 5: –*No te conviene elegir el 2 y el 3, y tampoco el 11 y el 12, porque tenés una sola suma que te dan esos números.*
Alumno 6: –*Van en orden los dos primeros* (se refieren a las sumas que dan 2 y 3), *tienen una sola suma posible, los dos que le siguen* (Se refieren a las sumas que dan 4 y 5.) *tienen dos sumas posibles y los del medio* (Se refieren a las sumas que dan 6, 7 y 8.) *tienen tres sumas posibles, después les siguen los que tienen dos sumas* (Se refieren a las sumas que dan 9 y 10.) *y con los dos últimos tienen la misma posibilidad que los dos primeros.*

En el momento de discusión, se recuperarán algunas de las conclusiones expresadas por los grupos que permiten iniciar a los alumnos en el análisis de datos y en la extracción de inferencias, llegando a conclusiones tales como:
–*Hay números que tienen las mismas posibilidades de ganar o perder. Los números que te dan menos posibilidades de ganar son los números de los extremos, pero aunque elijas el 6, 7 o el 8 también podés perder.*

Queda todavía por discutir que si bien para el 2 y el 3 tienen una sola suma posible, al tirar los dados, el 2 tiene una única posibilidad de salir (1 en cada dado) y el 3 tiene dos posibilidades (2 + 1 y 1 + 2).

Así, este juego se favoreció la conveniencia de interpretar información analizando datos concretos y formulando preguntas que los inicia en nuevos problemas donde se pueden hacer predicciones y contrastarlas con los resultados.

Plantear situaciones para obtener y organizar datos

Desde su origen, la estadística se ocupó del registro ordenado y sistemático de datos, pero sin embargo estuvo más relacionada con la política y la economía que con la matemática.

En la sociedad tecnológica actual, la destreza en la lectura crítica de datos es una necesidad, ya que diariamente se encuentran tablas y gráficos en la prensa y otros medios de comunicación referidas tanto al comercio, como a temáticas de otras disciplinas. ¿Quién no ha visto un gráfico de barras que ilustre la evolución del precio del petróleo año a año, o los canales de TV más vistos por los argentinos, o un gráfico circular que muestra el porcentaje de votos que obtuvo cada candidato?

Es precisamente la estadística la que brinda la oportunidad de dominar estos conjuntos de datos y hacerlos utilizables. Para ello, es necesario llevar a cabo un proceso de organización y análisis que permita comprender el funcionamiento de ciertas poblaciones.

El trabajo de estadística[27] en el aula podría estar vinculado a discutir y resolver el problema de definir y describir una muestra como así también inferir conclusiones a partir de los datos que se han representado. En el análisis de la información, es importante distinguir si los datos hacen referencia a todos los elementos que son objeto de estudio o sólo a una parte de ellos. Si la información da cuenta de la totalidad de los elementos del conjunto en cuestión, se trata de una población. Si, en cambio, se ha elegido un subconjunto de la población que permite inferir características de ésta, se ha trabajado con una muestra.

En el Primer Ciclo, cuando los chicos juegan a los dados o se realiza una votación, por ejemplo, para elegir el nombre de la biblioteca del aula, y se registran en una tabla los puntos o votos obtenidos, se inician las actividades para obtener y organizar datos.

Otras actividades implican la interpretación de tablas y gráficos ya confeccionados. En este sentido, en 5° año/grado, se han incluido actividades para interpretar los gráficos estadísticos denominados *gráficos de barra y pictogramas*.

[27] **Recomendación de lectura:** véase "Nociones de estadística", en Ponce, H. (2000), *Enseñar y aprender Matemática. Propuestas para el Segundo Ciclo,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

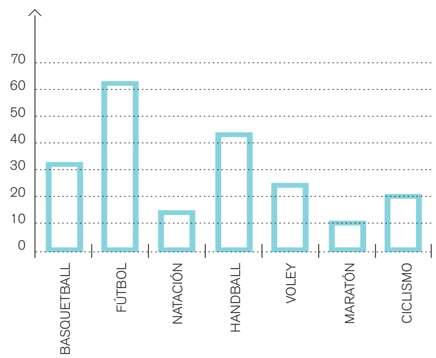
En 6º año/grado, es posible incluir la interpretación y producción de **gráficos de torta o circulares**. Esta representación, al igual que los gráficos de barra y los pictogramas, permite apreciar las variaciones en forma rápida y visual, pues se usan escalas que conservan la proporcionalidad entre las magnitudes que intervienen en la situación.

En el caso de los gráficos de torta, intervienen dos variables, una cualitativa que se suele representar con distintos colores para cada valor y otra variable cuantitativa. Está última se representa con diferentes amplitudes de sectores circulares, que se traducen antes en porcentajes de la magnitud correspondiente, considerando con 100% los 360° de la vuelta completa.

En este sentido, podemos proponer actividades de interpretación de diferentes niveles de complejidad. Una primera alternativa es considerar la representación del resultado de una votación que tiene la ventaja en términos de asignación de significado por parte de los alumnos, de ser similares a las que aparecen en los medios de comunicación cuando se realizan elecciones de autoridades. En este caso, la variable cualitativa o nominal es "la lista por la que vota" y la cuantitativa "el número de votos obtenidos", con números naturales.

• El siguiente gráfico muestra la información recogida, al comenzar las clases, por el profe de Educación Física, quien preguntó a sus alumnos de 6º año cuál es su deporte favorito. Ningún alumno dejó de responder y cada uno eligió un solo deporte como favorito. Analizá el gráfico y luego respondé a las preguntas.

a) ¿Cuántos alumnos respondieron la pregunta?
b) ¿Cuáles son los deportes favoritos de los alumnos?
c) ¿Cuál es el deporte que menos les gusta?
d) ¿Qué deportes les gustan menos que el voley?
e) ¿Cuántos alumnos prefieren basquetball o voley?
f) ¿Cuántos alumnos prefieren los deportes de equipo?
g) ¿Qué deporte es preferido por el triple de los alumnos que ahora prefieren natación?



Algunas preguntas se pueden responder comparando simplemente la altura de las barras en tanto que otras apuntan a obtener información numérica, como a), e), f) y g). También podemos pedir que formulen preguntas que se puedan responder a partir de este u otros gráficos.

Con el fin de cuestionar uno de los supuestos que los alumnos sostienen al resolver situaciones respecto de si una afirmación es "la falsa" entonces la otra es la verdadera, es posible dar interpretaciones erróneas del gráfico para que los chicos analicen la veracidad de las mismas. Por ejemplo, a partir de la siguiente consigna.

> • Juan dice que el triple de los alumnos prefieren basketball a maratón y Gabriel dice que el triple de los alumnos prefieren natación a handboll. ¿Quién tiene razón?

En este caso, ambas afirmaciones son falsas, pero los errores cometidos apuntan en un caso a la lectura del eje vertical y en otro a la interpretación del texto.

A partir de esta actividad, es posible proponer a los alumnos que realicen la misma encuesta en otro año/grado. Si la información recogida pretendiera ser usada por alumnos que escribirán artículos para el periódico escolar con los siguientes títulos *Qué deporte es el mas elegido entre los chicos, Las nuevas generaciones y los deportes grupales* o bien *Todos los chicos practican deportes,* sería posible abrir la discusión respecto de la elección del tipo de representación según la información que se pretende mostrar más claramente.

Otra opción es presentarles 2 ó 3 gráficos diferentes y sin datos, y pedirles que indiquen cuál es el que corresponde a una situación determinada.

Cabe destacar que muchas veces se manipula la información mediante el uso intencional de determinadas formas de representación. En algunos casos, el tipo de gráfico hace que se distorsione la información. Así, por ejemplo, en un gráfico circular es diferente si es bidimensional que si está en 3D y en perspectiva. En otros casos, cuando se utilizan gráficos de barras o columnas, lo que muestran los gráficos depende de la escala que se elija y del origen de coordenadas.[29]

Un ejemplo de actividad de mayor complejidad que la anterior es el que resulta de incluir números racionales. En este sentido, se podrían proponer distintas actividades a partir de tablas como las siguientes.

---

[1] En *Propuestas para el aula.* Material para el docente. *Matemática. EGB2.* Programa Nacional de Innovaciones educativas del Ministerio de Nación. En la propuesta ¡Salven la merluza!, se propone una actividad interesante al respecto.

• Analizá los siguientes cuadros y luego respondé.

Gases fundamentales de la atmósfera	
Nitrógeno (N2)	78,08 %
Oxígeno (O2)	20,95 %
Argón (Ar)	0,93 %
Neón, Helio, Kriptón	0,0001 %

Superficie de la Tierra cubierta por cada Océano	
Océanos	**Superficie (km^2)**
Pacífico	165.000.000
Atlántico	82.000.000
Índico	73.000.000
Antártico	20.000.000
Ártico	14.000.000

a) ¿Es posible construir un gráfico circular que muestre con claridad la información de cada tabla? ¿Por qué?
b) Cuando sea posible, construí el gráfico.
c) ¿Qué relación tienen los componentes de la atmósfera con las posibilidades de vida sobre la Tierra?
d) Conseguí la información que necesites y construí un gráfico de torta que permita comparar a simple vista la superficie de la Tierra cubierta de agua con la que corresponde a los continentes.

Los valores expresados en la primera tabla son muy diferentes, por tanto resulta complejo incluir todos los valores de la variable nominal en el gráfico circular. Al intentar volcar la información en un gráfico circular, una discusión que no puede faltar consistiría en la necesidad de aproximar algunas cantidades para hallar los porcentajes que facilitarían la confección de los mismos.

En Ciencias Naturales, en el Eje “La Tierra, el Universo y sus cambios” es posible que aparezca información organizada de diferente manera, tabla, gráfico circular, de barras o pictograma. Una intervención posible, en esos casos, es preguntar si dicha información era posible representarla de otra manera y qué ventajas podría tener hacerlo.

mate6.qxd 23/07/07 17:52 Page 124

nap

El reconocimiento y uso de relaciones espaciales y de sistemas de referencia.

El reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos y la producción y el análisis de construcciones considerando las propiedades involucradas.

La comprensión del proceso de medir, considerando diferentes expresiones posibles para una misma cantidad.

El análisis y uso reflexivo de distintos procedimientos para estimar y calcular medidas

Geometría y Medida

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología

EJE

Serie
Cuadernos para el aula

Geometría y Medida

Los saberes que se ponen en juego

Para que los alumnos puedan aprender los saberes incluidos en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, es necesario que propongamos situaciones de enseñanza en las que se pongan en juego distintos aspectos de los mismos. Se trata de que los conocimientos matemáticos se introduzcan en el aula asociados con los distintos problemas que permiten resolverlos, para luego identificarlos y sistematizarlos. Esto es:

- Ubicar puntos en el plano en función de un sistema de referencia dado.
- Interpretar, elaborar y comparar representaciones del espacio (croquis, planos) explicitando las relaciones de proporcionalidad utilizadas; teniendo en cuenta las relaciones espaciales entre los elementos representados.
- Describir, comparar y clasificar figuras en base a las propiedades conocidas;
- Producir y comparar desarrollos planos de cuerpos argumentando sobre su pertinencia.
- Copiar y construir figuras[1] a partir de diferentes informaciones sobre propiedades y medidas utilizando compás, regla y transportador y escuadra evaluando la adecuación de la figura obtenida.
- Ampliar y reducir figuras explicitando las relaciones de proporcionalidad involucradas.
- Componer y descomponer figuras y argumentar sobre las propiedades de las figuras obtenidas utilizando las de las figuras iniciales.
- Analizar afirmaciones[2] acerca de las propiedades de las figuras y argumentar sobre su validez.

[1] La complejidad de la tarea estará dada por el repertorio de figuras y propiedades involucradas y por los materiales que se utilicen.

[2] La complejidad de las afirmaciones estará dada por el repertorio de figuras y propiedades involucradas, promoviendo el avance desde comprobaciones empíricas (plegados, superposiciones, comparación de dibujos o usando regla o compás, mediciones) hacia argumentaciones más generales, utilizando propiedades conocidas.

- Estimar y medir efectivamente cantidades, eligiendo el instrumento y la unidad en función de la precisión requerida[3].
- Argumentar sobre la equivalencia de distintas expresiones para una misma cantidad, utilizando las relaciones de proporcionalidad que organizan las unidades del SIMELA.
- Calcular cantidades, estimando el resultado que se espera obtener y evaluando la pertinencia de la unidad elegida para expresar el resultado.
- Elaborar y comparar procedimientos para calcular áreas de polígonos, estableciendo equivalencias entre figuras de diferente forma mediante composiciones y descomposiciones para obtener rectángulos.
- Analizar la variación del perímetro y del área de la figura cuando varía la longitud de sus lados.

Propuestas de enseñanza

En este apartado, intentamos precisar el alcance y el sentido de los conocimientos que se priorizan en el Eje "Geometría y Medida". Para ello, proponemos algunos ejemplos de actividades para desarrollar en el aula y de producciones de los niños. Además, presentamos posibles secuencias de actividades que muestran el tipo de trabajo matemático propuesto desde el enfoque explicitado en el inicio de este *Cuaderno.*[4]

Para establecer y representar relaciones espaciales

Cuando se habla de "enseñanza de la geometría", en la escuela generalmente se hace referencia a dos campos de conocimientos: el de los conocimientos que el niño necesita para controlar sus relaciones habituales con el espacio, conocido como *estructuración del espacio* y el de los "conocimientos geométricos propiamente dichos". A pesar de las diferencias entre el conocimiento geométrico y el conocimiento espacial, ambos están fuertemente vinculados. El estudio histórico muestra que la geometría euclidiana surgió a partir de la resolución de problemas espaciales ligados a la medida de espacios físicos. Sin embargo, la geo-

[3] Se incluyen las construcciones de figuras geométricas y la elaboración de gráficos estadísticos.
[4] En reiteradas ocasiones, se propondrán actividades a partir de lo que se ha realizado en el año/grado anterior. En los casos en que los chicos no hayan realizado dicho trabajo u otro similar, es conveniente consultar *Cuadernos para el aula: Matemática 5* para que, en función de los conocimientos del grupo, el docente decida cómo adaptar la propuesta que allí se incluye.

metría se desarrolló desprendiéndose de sus orígenes espaciales y su objeto de estudio es, actualmente, un espacio ideal con objetos teóricos que obedecen a las reglas del trabajo matemático.

La construcción del espacio, considerado como un proceso cognitivo de interacciones, se desarrolla desde un espacio intuitivo en el que se manipulan objetos, se efectúan desplazamientos, medidas, cálculos espaciales de un espacio conceptualizado o abstracto, relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando propiedades geométricas, adoptando diferentes sistemas de referencia y anticipando relaciones. El dominio del espacio, es decir la posibilidad de control eficaz de las relaciones del sujeto con el espacio sensible, se facilitará si dispone de los conocimientos geométricos que podrá poner en juego para resolver los problemas a los que se enfrente. La resolución de problemas se apoya en la modelización del espacio en cuestión. El mundo físico tiende a ser explicado a través de modelos matemáticos y la geometría es muy útil en estos casos.

La geometría se ha constituido en parte como una modelización del espacio físico. A ella le compete la particular relación entre los datos que se obtienen a través de la percepción y la medición del espacio físico y de los objetos teóricos (figuras, cuerpos, etc.), así como la formulación de sus propiedades que funcionan en la matemática.

Podemos afirmar, entonces, que el sentido del espacio se inicia en los niños a través de la experiencia directa con los objetos del espacio circundante, pero es necesario enriquecer esos conocimientos a través de actividades que impliquen representaciones del espacio, transformaciones, discusión de ideas, conjeturas y comprobación de hipótesis, priorizando la anticipación y el control de las acciones sobre el espacio.

El trabajo en el aula tendrá la intencionalidad de que los alumnos logren desarrollar una concepción del espacio que les permita un control adecuado de sus relaciones espaciales a partir de plantearles problemas relativos al espacio que puedan resolver a partir de sus concepciones espontáneas. Como ya hemos afirmado al comienzo de este *Cuaderno*, el sentido de un conocimiento está vinculado a las nociones que se ponen en juego para resolver un problema. En este caso, las situaciones pueden ser tomadas de la vida cotidiana o del contexto propio de la geometría[5].

La propuesta para 6º año/grado es continuar el trabajo ya iniciado sobre las representaciones del espacio, para avanzar en el uso de sistemas de referencia para la ubicación de puntos en el plano.

[5] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Los contextos” en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*.

Plantear situaciones para ubicar puntos en un sistema de referencia

Las experiencias de ubicación de objetos en el espacio realizadas en años anteriores sirven de base para determinar la posición de un punto en el plano o en el espacio. Si bien cada una de las relaciones espaciales es importante en sí misma, para la estructuración del espacio y para los saberes prácticos de los alumnos, la construcción de un sistema de coordenadas es el modelo matemático que resuelve el problema de la representación. Hay diferentes maneras de definir un sistema. Por ejemplo, para ubicar una ciudad sobre la superficie de la Tierra, se usan dos coordenadas: latitud y longitud, definidas a partir del sistema dado por el Ecuador y el meridiano de Greenwich. Asimismo, para ubicar la posición de una ciudad sobre una ruta, se indica el número de la ruta y la distancia a partir de un punto de origen que, en el caso de nuestras rutas nacionales, es el Congreso de la Nación, en la Ciudad de Buenos Aires. En tanto que para ubicar un punto en el plano, usualmente se utiliza el sistema de coordenadas rectangulares, también llamado *sistema de coordenadas cartesianas* debido al filósofo y matemático René Descartes que introdujo su uso hacia 1600.

A veces, se desea establecer mediante coordenadas una calle o un edificio en el plano de la ciudad y se usa un sistema de referencias combinando números y letras. Si los alumnos no conocen este tipo de sistema, es conveniente que lo exploren antes de trabajar sobre la localización de puntos.

Con el fin de que los alumnos adviertan la necesidad de definir dos coordenadas para determinar un punto en el plano en un **sistema de referencia** y puedan apropiarse de la noción de par ordenado, podemos proponer actividades como las que se incluyen en la siguiente secuencia.

Secuencia para avanzar en el uso de coordenadas: “Ubicar posiciones”

Si los alumnos hubieran trabajado en años anteriores con cualquiera de las propuestas más sencillas del tipo “Batalla naval” y “Batalla geométrica”[6], en las que utilizaron referencias que combinan una letra y un número para ubicar una cuadrícula determinada, es posible recordar dicha actividad y comenzar esta secuencia desde la segunda actividad. En caso contrario, se recomienda comenzar por la primera actividad.

---

[6] **Recomendación de lectura:** estas propuestas se encuentran en el apartado “Plantear situaciones para ubicar posiciones en función de distintas referencias”, en “Para establecer y representar relaciones espaciales”, de *Cuadernos para el aula: Matemática 4* y *Cuadernos para el aula: Matemática 5.*

Actividad 1

Se les plantea a los chicos que, en pequeños grupos, discutan cómo armar un código secreto para enviar mensajes utilizando, por ejemplo, una cuadrícula como la siguiente:

9	C	F	R	G	L	O	M	I	H	K
8	B	D	J	H	N	Ñ	Z	X	V	U
7	A	T	S	R	P	J	K	E	O	G
6	H	Q	N	Y	U	V	B	U	S	N
5	O	G	U	M	S	I	W	R	D	X
4	T	E	K	S	A	T	F	M	J	V
3	R	P	O	C	Q	E	L	N	U	Y
2	J	U	L	Z	H	Q	I	A	P	E
1	Ñ	M	V	X	O	I	T	L	C	Q
0	E	W	S	B	D	R	G	Z	F	A
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Se puede proponer a los alumnos que luego elaboren un mensaje para que otro grupo pueda descifrarlo, utilizando los números del tablero como referencias para localizar las letras. Durante el primer intercambio habrá que discutir la necesidad de acordar en qué orden se usan los números, ya que para este tablero, por ejemplo, el par (2; 5) podría indicar una *U* o una *Q*.

Actividad 2

"Descubrir la clave": ubicar puntos en el plano.
Materiales: cada grupo contará con papel del tamaño de una cartulina y un cartoncito o varilla de madera de 10 cm que funcionará como unidad.
Organización de la clase: la clase se dividirá en un número par de grupos, de 4 ó 5 integrantes cada uno.
Desarrollo: como se trata de un juego de comunicación, antes de comenzar a jugar se enumeran los grupos y se establece quiénes intercambiarán entre sí sus producciones. Cada grupo recibirá una tarjeta con cinco consignas, que deberán ser resueltas en la cartulina (distinto del de los demás). Por ejemplo:

• Dibujen:
a) Un punto **a** a una distancia de 4 unidades con respecto al borde inferior.
b) Un punto **b** a una distancia de 3 unidades con respecto al borde vertical derecho.
c) Un punto **c** a una distancia de 5 unidades con respecto al borde vertical izquierdo.
d) Un punto **d** a una distancia de 2 unidades con respecto al borde vertical izquierdo y de 4 unidades con respecto al borde inferior
e) Un punto **e** a una distancia de 3 unidades con respecto al borde vertical izquierdo y a 5 unidades con respecto al borde inferior

Una vez que los distintos grupos hayan resuelto las consignas, se intercambian las cartulinas. Cada grupo receptor deberá producir el mensaje que supone que recibió el grupo que marcó los puntos en la cartulina. Se escriben las consignas y se entregan al grupo emisor. Cada grupo obtiene un punto por cada consigna bien escrita. Gana el grupo que obtenga el mayor puntaje.

Seguramente, una de las primeras dificultades de los grupos será determinar cuál se considera el borde inferior de la cartulina, cuestión que podría discutirse al plantear las consignas.

En el momento de reflexión posterior al juego, podremos plantear preguntas como las siguientes:
¿En qué casos hubo diferencias entre las consignas? ¿Por qué?
¿En qué casos pudieron determinar los puntos sin dificultad?
¿Cuántos datos es necesario definir para ubicar un punto en la hoja de papel?
¿Qué ocurre si se cambia el orden de los datos en relación al punto que se determina?

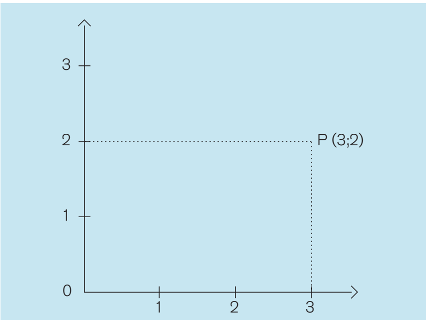
El objetivo del juego es que los alumnos descubran que para fijar un punto en el plano hay que definir dos coordenadas, dado que con sólo una hay infinitas posiciones del punto y que cada coordenada indica la distancia del punto en relación con cada borde de la cartulina, que luego se vincularán con los ejes[7].

[7] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Las representaciones" en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

Según los conocimientos disponibles de los alumnos, podríamos incluir consignas con expresiones fraccionarias, como *dibujen un punto* ***x*** *a 3 unidades y media con respecto al borde inferior* o dar unidades de distinta longitud, para concluir luego que la posición del punto queda determinada en función de las unidades que se definen para los ejes.

En este punto del trabajo es necesario precisar que el sistema de coordenadas es una convención con ciertas condiciones. Así, por ejemplo, el **sistema de coordenadas cartesianas ortogonales** está formado por un par de ejes perpendiculares sobre los que se define un segmento unidad y, en forma equidistante, se representan los números. Es decir, son dos rectas numéricas que se cortan en un punto llamado origen del sistema. El eje horizontal es el eje de las abscisas y el eje vertical, el eje de las ordenadas.

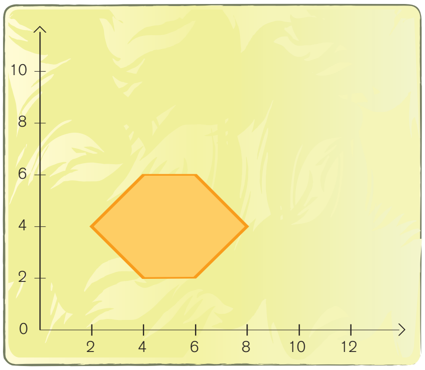
Todo punto del plano puede ubicarse por medio de un par ordenado de números llamados coordenadas del punto. Para ubicar, por ejemplo, el punto P (3; 2). El primer elemento del par, 3, es la abscisa del punto y el segundo elemento del par, 2, es la ordenada del punto.



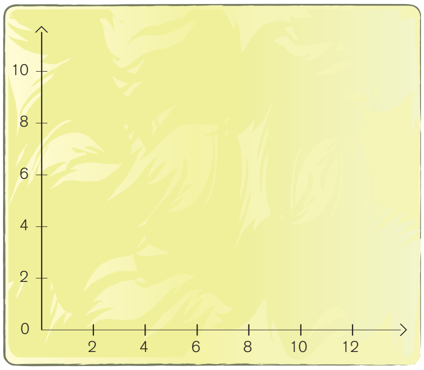
Actividad 3

Otra actividad que podemos plantear, para que los chicos utilicen lo aprendido y ubiquen puntos en el sistema de ejes, es un juego como el siguiente.

> **“Un mensaje con puntos”:** ubicar los vértices de figuras geométricas.
> **Materiales:** cada grupo contará con una tarjeta con una determinada figura sobre un sistema de ejes, y otra tarjeta en la que sólo esté dibujado el sistema de coordenadas de las mismas dimensiones que el sistema anterior.
> Por ejemplo:



Tarjeta 1



Tarjeta 2

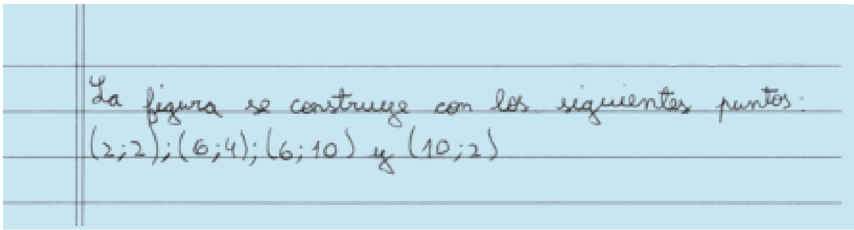
Organización de la clase: en un número par de grupos, de 4 ó 5 integrantes.
Desarrollo: cada grupo recibirá una tarjeta con una figura del tipo de la tarjeta 1 y tendrá que elaborar un mensaje para que el grupo receptor pueda construir la figura. En el mensaje no podrá contener dibujos ni el nombre de la figura. Al intercambiar los mensajes, los grupos que ahora funcionan como receptores recibirán otra tarjeta como la 2 en la que estará dibujado el sistema de ejes sobre el que dibujarán la figura. Cuando hayan terminado de dibujar la figura, los emisores y receptores que forman el mismo equipo se reunirán para comparar las figuras.

Este tipo de actividad promueve que los alumnos reconozcan que las coordenadas de un punto son un recurso útil para definir los vértices que permiten la construcción de la figura.

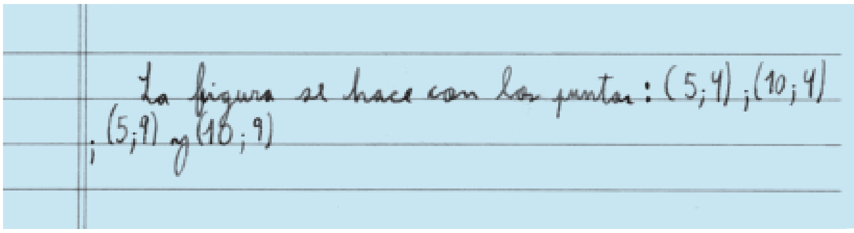
Para complejizar esta actividad, podemos tener en cuenta los contenidos abordados en otros apartados, como “Plantear situaciones para comparar cantidades y números” donde se debe ubicar el vértice entre dos valores enteros determinados en los ejes o en “Plantear situaciones para reproducir figuras”, ya que las figuras pueden ser variadas: cóncavas y convexas.

Si quisiéramos aprovechar el trabajo sobre coordenadas, para avanzar en el estudio de las propiedades de las figuras, podríamos incluir actividades como las siguientes.

• a) Julián y Marina estaban jugando al juego de los mensajes, y al ver las coordenadas de los vértices de la figura que recibieron en el mensaje, dijeron que es una figura simétrica. ¿Vos que pensás?, ¿tienen razón Julián y Marina?


La figura se construye con los siguientes puntos: (2;2); (6;4); (6;10) y (10;2)

b) Los chicos que recibieron el mensaje de Julián y María dicen que antes de dibujar la figura, ya saben que es un cuadrado. ¿Cómo creés que se dieron cuenta?


La figura se hace con los puntos: (5;4); (10;4); (5;9) y (10;9)

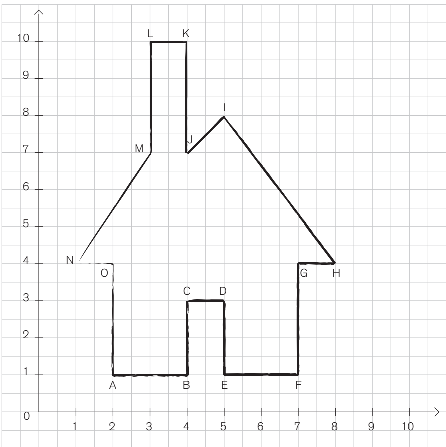
• a) Completá las coordenadas de los puntos que faltan, para que la figura sea un cuadrado.
A: (5;10) B: (5;4) C: (…;…) D: (…;…)
b) Completá las coordenadas de los puntos que faltan, para que la figura sea un rectángulo
M: (0;3) N: (…;…) P: (6;5) Q: (…;…)
c) Explicá por escrito cómo pensaste en a) y en b), y luego discutí tu propuesta con un compañero.
d) Discutí en grupo cómo se definirían las coordenadas de los vértices de un rombo. Escriban entre todos un ejemplo y luego verifíquenlo, dibujando el rombo en un sistema de coordenadas.

Cuando, en la discusión final, explicitemos los procedimientos de los alumnos resultará interesante que propongamos la discusión acerca de dónde se ubican los puntos cuando una de las coordenadas es cero. Como así también las semejanzas y diferencias de las coordenadas de los puntos que definen lados congruentes de una figura.

Plantear situaciones para producir e interpretar representaciones a escala

En 6º año/grado, los alumnos seguramente ya han interpretado algunas representaciones a escala, como mapas o planos[8], pero es probable que no hayan explicitado las relaciones de proporcionalidad que han utilizado. El trabajo planteado en el Eje "Número y Operaciones", a propósito de la proporcionalidad, nos habilita ahora a realizar un análisis con mayor profundidad que, a la vez, permite articular estos ejes y ampliar el sentido de las nociones involucradas. En principio, y para profundizar el conocimiento de los sistemas de coordenadas, se podría analizar la importancia de mantener una escala en dichos sistemas planteando una actividad como la siguiente.

- Observá la figura que sigue:

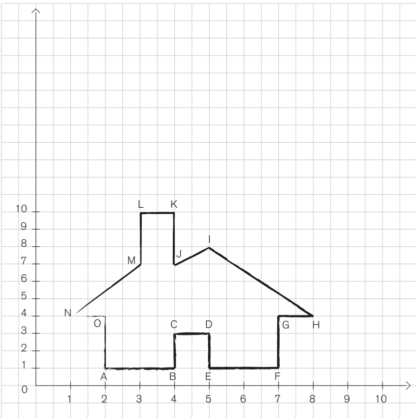


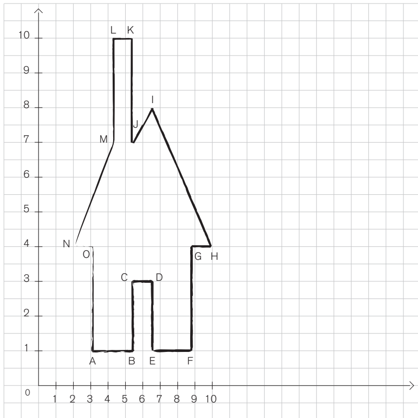
[8] **Recomendación de lectura:** actividades de este tipo pueden encontrarse en el apartado "Plantear situaciones para producir e interpretar representaciones del espacio bi y tridimensional" incluido en "Para establecer y representar relaciones espaciales" de *Cuadernos para el aula: Matemática 5.*

a) Discutí con un compañero cómo resultará la figura, si cambian la escala de los ejes así:
- conservando la unidad en el eje *x* y reduciendo a la mitad la unidad del eje *y*.
- reduciendo a la mitad la unidad del eje *x* y conservando la del eje *y*.

b) Una vez que acuerden cómo piensan que van a quedar las figuras, verifíquenlo dibujando los sistemas y las figuras con las mismas coordenadas que las dadas.

Las figuras obtenidas por los alumnos no mantendrán la forma original.





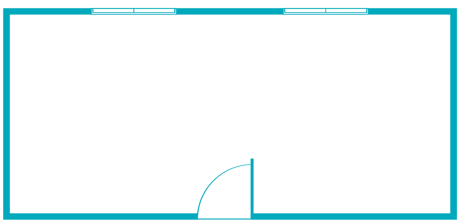
Una vez realizada esta exploración, podremos pedir a los niños que anticipen qué ocurre con la figura, si ambas escalas se modifican respetando la misma regla, por ejemplo la mitad de la unidad para el eje *x* y para el eje *y*. También se podrían presentar ampliaciones y reducciones de la figura para que los alumnos determinen cuál es la constante de proporcionalidad utilizada y adviertan cómo se modifica el tamaño si este número es mayor o menor que 1.

En el apartado "Plantear situaciones para analizar relaciones de proporcionalidad" de este *Cuaderno* se afirmó que nuestra tarea no consiste en comunicar y mostrar a los alumnos cómo funciona la regla de tres para aplicarla a este tipo de problemas, sino que deberemos generar situaciones, en este caso, de ampliaciones y de reducciones, donde estas estrategias se pongan en juego y promover la reflexión sobre las propiedades que actúan como instrumentos de resolución. Solo de esta manera los chicos podrán dominar las reglas para luego decidir cuál usar según los números que aparecen.

Si consideramos que la figura es muy compleja, podríamos reemplazarla por un cuadrado, un rectángulo u otro polígono. Esto permitiría, a la vez, analizar cuáles son las propiedades de la figura que se mantienen (amplitud de los ángulos, paralelismo de los lados) y cuáles se modifican (longitud de los lados), cuando se realizan ampliaciones o reducciones. Estos aspectos también podremos retomarlos cuando se analicen las actividades planteadas en los apartados “Plantear situaciones para construir figuras con distintos procedimientos” y “Plantear situaciones para avanzar en la exploración de relaciones entre perímetros y áreas” en este mismo Eje.

Podríamos complejizar las actividades sobre planos, por ejemplo al incluir la consideración de la escala en la siguiente consigna:

• Ubicá en este plano, en el que se representa una sala de computación y video de 7 m de ancho por 15 m de largo, los siguientes objetos:
-5 mesas de computadora, de 1 m x 60 cm, a la derecha de la puerta de entrada. Otras 2 mesas en la pared donde están las ventanas. Una mesa rectangular de 1 m x 2,50 m con 8 sillas alrededor, en el centro de la sala. Por último, una mesa para ubicar la TV y la reproductora de videos en una esquina.



1 cm = 2,5 m

En este caso, los alumnos tendrán que descubrir la escala utilizada en el plano que se adjunta, para luego aplicarla al mobiliario que deben incluir en dicho salón.

Podríamos aprovechar el trabajo realizado en Ciencias Sociales a propósito de la interpretación de mapas y el uso de distintas escalas. Por ejemplo, en Cuadernos para el aula: Ciencias Sociales 6, en el Eje “Las sociedades a través del tiempo”, se estudian las políticas impulsadas por el Estado Nacional para desarrollar la economía agroexportadora. Asimismo, en los mapas con redes ferroviarias de Argentina, se puede observar su confluencia en Buenos Aires y la mayor densidad en la zona pampeana que en otras regiones. También se incluye un planisferio, en el que se marcan los países que producen bienes primarios y los que producen bienes industriales, y las flechas de flujo de mercaderías.

Para avanzar en el conocimiento de las figuras y de los cuerpos geométricos

Pensar en una propuesta de enseñanza acerca de las figuras bi y tridimensionales nos lleva a plantearnos ciertos interrogantes: ¿Qué significa estudiar figuras? ¿Reconocerlas, recordar sus nombres? ¿Enunciar sus propiedades o clasificarlas? ¿Cómo favorecer en los alumnos la construcción del concepto de cuerpo geométrico?[9]

Cuando los niños ingresan en la escuela, consideran las figuras como dibujos, es decir que su reconocimiento está basado en la percepción, así por ejemplo reconocen al cuadrado en forma global sin percibir las propiedades que lo caracterizan.

Las relaciones entre dibujo y figura son complejas y se van modificando en función de los conocimientos que los niños van elaborando: cada uno identifica en el dibujo las propiedades del objeto geométrico de acuerdo a los conocimientos que posee y, a medida que evolucionan sus conceptualizaciones, las propiedades del objeto geométrico que ese dibujo representa se tornan más observables. Esta evolución es producto de un proceso de aprendizaje que supone la resolución de problemas que exijan y posibiliten la elaboración del conocimiento del que los niños tienen que apropiarse.

Muchos autores han hecho explícitas las diferencias entre dibujo y figura. Entre ellos, Parzysz[10]: afirma que *la figura es el objeto geométrico descrito por el texto que la define, una idea, una creación del espíritu, en tanto que el dibujo es una representación de este objeto.*

A propósito de las relaciones entre dibujo y figura, es también interesante destacar que, muchas veces, un dibujo no da cuenta de todas las propiedades y relaciones planteadas en un problema. En otros casos, los alumnos infieren propiedades del dibujo que no forman parte del objeto geométrico que están analizando. Por ejemplo, la posición del dibujo con respecto a la hoja de papel. Un cuadrado "torcido", deja de ser cuadrado, para muchos niños.

Si bien en el Primer Ciclo el tratamiento de las figuras como dibujos será preponderante, es importante que en el Segundo Ciclo, desde la propuesta de enseñanza, los alumnos tengan oportunidad de enfrentarse a situaciones que les exijan hacer anticipaciones, tomar decisiones basadas en conocimientos

[9] **Recomendación de lectura:** véase Itzcovich, H. (2005), *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría, Libros del Zorzal.*

[10] Citado en Laborde, C. y Capponi, B. (1994), Cabri-Geometre *Constituant d´un millieu por láprentissage de la notion de Figure géometrique. Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 14,12. París. La Pensée Sauvage Editions.

geométricos y encontrar la manera de validarlas. En ese proceso, las construcciones ocupan un lugar esencial y el dominio de ciertas habilidades, como el uso de instrumentos o la precisión en el trazado, debe estar subordinado al aprendizaje de los conceptos y relaciones.

Entre los problemas que podemos proponer, distinguiremos los que implican construcciones, para los cuales es preciso que los alumnos elaboren las propiedades de las figuras, de otros problemas, en los que se usan las propiedades ya conocidas. Para resolver los primeros, buscaremos que los alumnos anticipen resultados sin recurrir a la experiencia de medir. El hecho de no recurrir a la experiencia sensible implica asumir que las relaciones que se establecen son independientes de las medidas.

De modo similar, la actividad de clasificación de figuras (de triángulos o de cuadriláteros) quedará a cargo de los alumnos y nuestra tarea será seleccionar el universo de figuras sobre el que se va a trabajar, promoviendo que sean los alumnos los que esbocen criterios de clasificación, los pongan a prueba, los reformulen.

Los dibujos sobre el papel constituyen una poderosa herramienta para la resolución de problemas, y también un paso intermedio entre los objetos teóricos y los objetos reales. Estas representaciones se construyen en un juego de acuerdos y desacuerdos entre los datos que se apoyan en la percepción y los que responden a las condiciones teóricas del problema y que pueden oponerse a la evidencia. Con esta propuesta de enseñanza deseamos lograr que los alumnos aprendan a interpretar el dibujo como una referencia y a considerar sólo las relaciones dadas en el texto.

En general, todos lo docentes nos preocupamos por lograr que los niños sean hábiles en el manejo de instrumentos. En este sentido, creemos que es interesante enfrentar a los niños con actividades que les permitan ir logrando cada vez más destrezas en el uso de los instrumentos, pero es necesario tener en cuenta que ese logro no es el objeto de la enseñanza. La precisión en el uso de los instrumentos de geometría debe estar al servicio de la resolución de problemas y de las conceptualizaciones que sí son objeto de estudio de la geometría. Autorizar o no el uso de un determinado instrumento es una de las variables que podemos utilizar para poner condiciones a los problemas, de manera que en su solución se involucren diferentes relaciones entre los elementos de las figuras.

En 6º año/grado, continuaremos con la sistematización de las propiedades de lados, ángulos y diagonales de triángulos, cuadriláteros y polígonos de más de cuatro lados. En cuanto a los cuerpos, profundizaremos el estudio de poliedros.

Plantear situaciones para comparar y describir figuras y cuerpos

Retomar el juego de adivinar figuras o cuerpos favorece que los alumnos puedan observar nuevas propiedades de las mismas. Cuando los chicos disponen de unos primeros conocimientos sobre los elementos de las figuras y de los cuerpos, y algunas de sus propiedades, van descubriendo nuevas relaciones que hasta el momento no podían advertir. Por ejemplo, frente a una colección de cuadriláteros, muchos alumnos podrían preguntar *¿tiene lados opuestos iguales?* y luego *¿tiene ángulos iguales?*, sin advertir que si un cuadrilátero tiene lados opuestos congruentes, los ángulos opuestos también son congruentes. Así, es posible volver a jugar para favorecer nuevos aprendizajes a partir de un análisis más profundo de las preguntas. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que al repetir un mismo tipo de actividad, los alumnos pueden perder interés y, en ese sentido, es importante averiguar si nuestro grupo ya conoce este juego y si lo ha jugado ya varias veces.

Para el caso de los cuerpos, es posible entonces proponer el juego para advertir la relación entre la forma y números de sus caras:

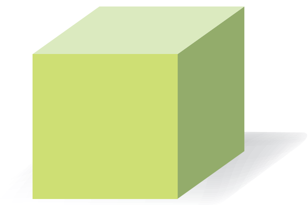
> **"Adivinar el cuerpo":** establecer relaciones entre la forma y el número de las caras de distintos cuerpos geométricos.
> **Materiales:** una caja de cuerpos geométricos que incluya poliedros (prismas y pirámides) conos y cilindros.
> **Organización de la clase:** grupos de cuatro integrantes cada uno.
> **Desarrollo:** el maestro elige un cuerpo del conjunto de cuerpos de la caja. Cada grupo va realizando por escrito, de a una, las preguntas que hará al maestro para adivinar el cuerpo elegido. El maestro sólo responde por sí o por no a cada pregunta. Gana el grupo que descubre el cuerpo con la menor cantidad de preguntas.

En otro momento, podríamos proponer que uno de los integrantes de cada grupo sea quien elige el cuerpo y responda a las preguntas que le hacen sus compañeros. Esto implica que quien responde por sí o por no, tiene que analizar las propiedades del cuerpo elegido.

Si el grupo ya ha realizado este tipo de juego, entonces es posible que no aparezcan preguntas como: *¿Cuántas caras tiene?* o *¿qué forma tienen sus caras laterales?* que no pueden responderse por *sí* o por *no*. Pero sí es posible que los alumnos formulen preguntas referidas a las propiedades de los cuerpos que ya han sido descartadas con las preguntas anteriores. Por ello, resulta interesante que, para organizar la discusión posterior, contemos con el registro de las preguntas y propiciemos el análisis de su pertinencia en relación con las condiciones necesarias y suficientes para descubrir el cuerpo elegido. A partir de la discusión instalada en el grupo, se pueden registrar en un afiche aquellas preguntas necesarias y suficientes para descubrir el cuerpo elegido. Una variante para jugar en otras ocasiones, puede ser limitar el número de preguntas para exigirles a los chicos que identifiquen las propiedades esenciales de cada cuerpo o figura elegido.

Otra variante, si los alumnos ya han trabajado antes sobre representaciones de cuerpos, es pedir que el que adivina tenga que hacer un esquema para comparar luego el dibujo con el cuerpo. Es importante advertir que, si bien las representaciones en perspectiva de los cuerpos ya aparecen en los libros de texto de Primer Ciclo, la interpretación de estas representaciones requiere un trabajo específico ya que, por ejemplo, algunas propiedades del cuerpo no se observan en el dibujo. Por ejemplo, podremos entregar una fotocopia con un cubo dibujado y una pregunta como la siguiente:

• ¿Podríamos asegurar que este dibujo representa un cubo, si solo una cara es cuadrada, en las otras no se observan ángulos rectos y los lados no son todos congruentes?

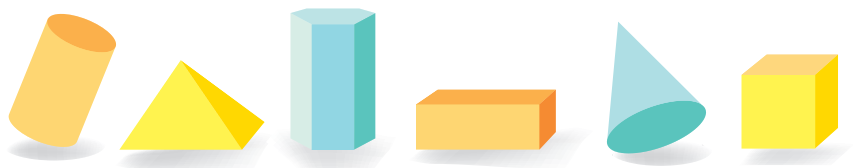


En este sentido, será necesario que propongamos situaciones en las que los alumnos deban dibujar cuerpos desde distintos puntos de vista y discutir luego qué propiedades se “ven” en las distintas representaciones y cuáles no.

Luego, ofreceremos situaciones simuladas como las que siguen.

• Leticia y María Emilia juegan a adivinar un cuerpo. Leticia le dice a María Emilia:

–Ya elegí uno de estos cuerpos. Para adivinarlo, sólo podés hacerme tres preguntas.



María Emilia pregunta: *¿Tiene alguna cara curva? ¿Termina en punta?*

a) Si las dos respuestas de Leticia son *sí*, ¿es necesario hacer otra pregunta?

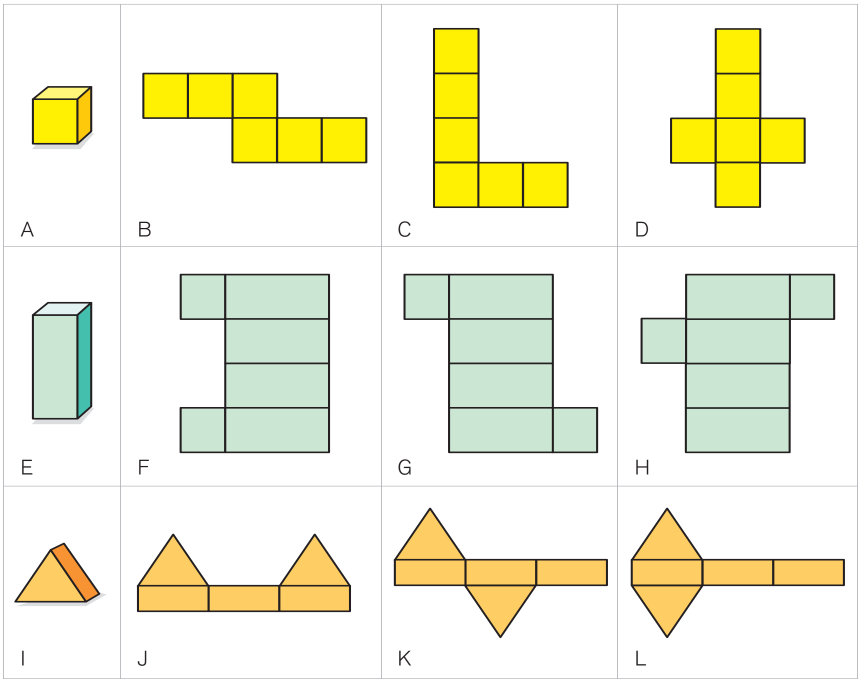
b) Si suponés que la dos repuestas son *no*, ¿qué pregunta harías para saber de qué cuerpo se trata? Explicá cómo lo pensaste.

En la discusión posterior analizaremos cómo las respuestas afirmativas o negativas hacen variar el cuerpo elegido y sobretodo propiciaremos que los alumnos descubran cuáles son las propiedades que permiten identificar a uno y otro cuerpo.

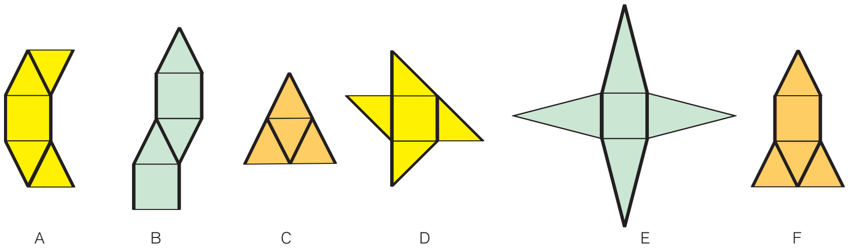
Este juego se puede proponer también con figuras, por ejemplo con el conjunto de los cuadriláteros, para que los alumnos pongan en juego las propiedades ya exploradas: lados o ángulos congruentes, lados paralelos, ángulos rectos. Así, podrán avanzar en el descubrimiento de otras propiedades, como lados opuestos paralelos y congruentes, ángulos opuestos congruentes, diagonales congruentes y perpendiculares, que permiten identificar cada cuadrilátero. Es interesante poner condiciones, por ejemplo no se puede preguntar por ángulos rectos o lados iguales para que surjan otras propiedades.

Otro tipo de actividades que podremos plantear para describir cuerpos, estableciendo relaciones entre sus elementos es por ejemplo la que sigue.

• Analizá los siguientes desarrollos planos y señalá con cuáles es posible armar el prisma dibujado. Explicá cómo lo pensaste.



• Decí con cuál de los desarrollos planos, sin recortarlos, se puede construir un farolito de cartulina en forma de pirámide de base cuadrada. Explicá por escrito cómo lo pensaste en cada caso.

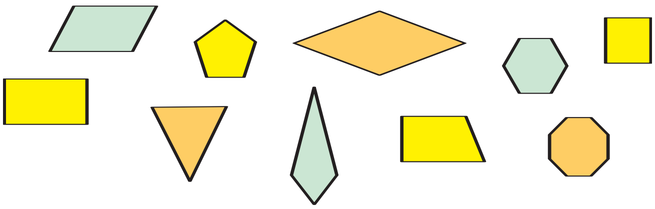


Las actividades de este tipo favorecen que los alumnos establezcan conclusiones sobre la relación entre la forma de la base de una pirámide y la cantidad de triángulos que constituyen las caras laterales. Si bien esperamos que la validación realizada por los alumnos sea de tipo argumentativo en un primer momento, también existe la posibilidad de verificar lo que piensan recortando y armando los cuerpos.

Otras actividades relacionadas con la descripción de las propiedades esenciales de las pirámides son aquellas en las que se dan algunas de las caras laterales y la base, y se pide que completen el plano para que sea posible armar una pirámide. Los juegos de comunicación en los que los alumnos tienen que elaborar mensajes para dictar una figura o describir un cuerpo ,de modo que el que recibe el mensaje pueda construir uno exactamente igual son actividades muy apropiadas para promover no sólo que exploren las propiedades esenciales, sino que favorecen la apropiación del vocabulario específico cuando se confrontan las características explicitadas en los mensajes.

Para profundizar el análisis de las propiedades que definen cuerpos o figuras, que ya se inició en años anteriores, es necesario plantear también situaciones en las que los alumnos tienen que validar mensajes realizados para describir figuras o cuerpos o completarlos para abordar explícitamente el trabajo sobre la argumentación. Otro factor de complejización es considerar las relaciones entre propiedades, por ejemplo, analizar si es posible que un cuadrilátero tenga, a la vez, dos pares de lados paralelos y ángulos opuestos no congruentes.

• Cecilia eligió una de estas figuras y escribió este mensaje. Analicen si lo que escribió alcanza para saber cuál es la figura que eligió.



La figura que elegí tiene diagonales congruentes y pares de lados paralelos

El tipo de mensajes que presentemos a los alumnos dependerá de los conocimientos que se hayan explicitado hasta el momento. En tal sentido, habrá que articular estas propuestas con las que se presentan más adelante, en el apartado “Plantear situaciones para sistematizar propiedades de figuras y cuerpos”.

Plantear situaciones para construir figuras con distintos procedimientos

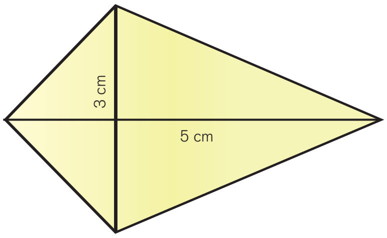
Cuando planteamos que las actividades que proponemos desde la enseñanza tienen que favorecer la construcción de los conocimientos por los alumnos y en este caso en particular favorecer la elaboración de las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos, las construcciones ocupan un lugar esencial. En este caso, estamos considerando las construcciones, no como las utilizamos en nuestra escolaridad, sino como un recurso muy valioso para la exploración y el descubrimiento de propiedades y relaciones a partir del análisis y de la posibilidad de anticipar, conjeturar, confrontar para avanzar en los conocimientos. Estamos pensando en que esas construcciones representen genuinos problemas y no algoritmos que hay que saber repetir.

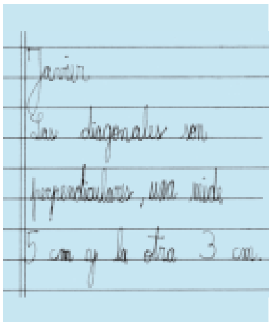
En este sentido, podremos, a través de las actividades, inhibir el uso de algunos instrumentos para habilitar otros que exijan a los alumnos desplegar procedimientos diferentes para resolver una situación.

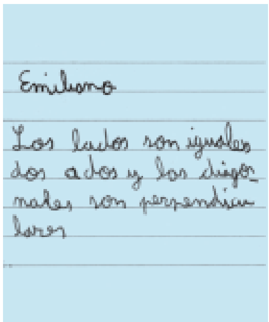
Las actividades de **dictado de figuras y copiado a partir de pedir datos** involucran construcciones y dan al alumno la oportunidad de buscar las relaciones y los elementos necesarios, como así también discutir acerca de la posibilidad de construcción y la cantidad de soluciones.

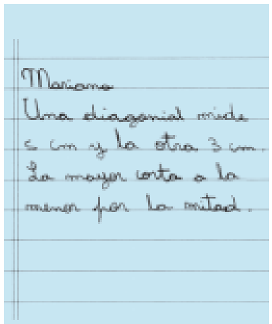
• a) Mariana dibujó un cuadrilátero cuyas diagonales miden 4 y 7 cm. Cada una corta a la otra en el punto medio. Ahora dibujá vos un cuadrilátero con esas características.
b) ¿Podés asegurar que la figura que dibujaste es igual a la que hizo Mariana? ¿Por qué?

• Para que Mariana pudiera construir esta figura sin verla, los chicos escribieron estos mensajes. ¿Cuál creés que permite construir la figura?

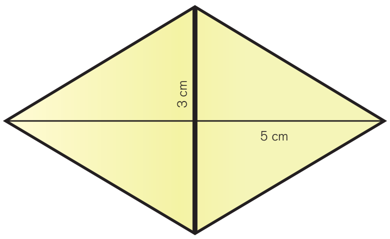


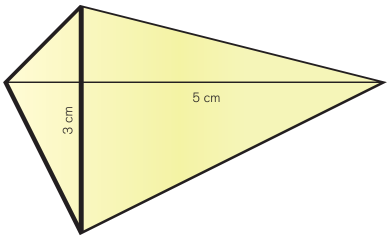






En actividades como las anteriores, centraremos la discusión en distinguir qué propiedades caracterizan a una figura y cuáles caracterizan a más de una figura. Por ejemplo, si bien el romboide cumple las condiciones del mensaje de Javier, también hay otras figuras, infinitas, que lo cumplen.





En este caso, será necesario que los alumnos agreguen alguna condición para que el mensaje sea efectivo. Esta tarea es compleja, pues requiere establecer relaciones entre clases de figuras y llevará más o menos tiempo de clase, dependiendo del repertorio de figuras que deseemos abarcar. En este sentido, actividades como las de la siguiente secuencia podrían adaptarse para estudiar otros polígonos.

Secuencia para determinar propiedades de una figura: "Construir rectángulos"

Actividad 1
Se organiza la clase en grupos, propondremos a los alumnos discutir lo que indica la consigna.

> • a) En grupo, analicen cada caso y definan si es posible construir una única figura, si se pueden construir figuras diferentes o si no se puede construir ninguna figura.
> I. un rectángulo que tenga un lado de 3 cm y otro de 5 cm.
> II. un rectángulo que tenga dos lados de 5 cm.
> III. un rectángulo que tenga una diagonal de 8 cm.
> IV. un rectángulo cuyo perímetro mida 16 cm.
> V. un cuadrilátero que tenga sus diagonales que miden 4 y 7 cm.
> VI. un cuadrilátero que tenga sus diagonales iguales.
> b) En los casos en que sea posible construir más de una figura, modifiquen los datos para que sea posible construir una única figura.

Esta actividad exige que, a partir de las condiciones dadas, los alumnos anticipen las construcciones posibles y sobre todo determinen si se trata de una única figura o no. Será importante promover en los grupos no sólo la anticipación, sino la justificación de sus afirmaciones. En una puesta en común propondremos registrar las primeras conclusiones sobre las propiedades del rectángulo.

Actividad 2
Para recuperar las propiedades de las diagonales que seguramente surgieron de la actividad anterior, podremos continuar con la siguiente actividad de construcción.

> • a) Construí un rectángulo de modo que el segmento AB sea una diagonal.
>
> 
>
>
> b) ¿Podés construir otro rectángulo distinto que también tenga a AB como diagonal?
> c) ¿Cómo podés asegurar que la figura que obtuviste es un rectángulo?

Actividad 3

A continuación, podremos ofrecer una tarea diferente, que consiste en analizar afirmaciones de otros.

• Considerá las siguientes afirmaciones y decidí si estás de acuerdo o no con lo que dicen los chicos.

María Luz Ramiro Jessica

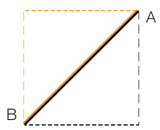
Actividad 4

La siguiente es una actividad de síntesis. En la puesta en común, convendrá que solicitemos a los chicos que expliquen por qué creen en cada caso que la figura resulta un rectángulo, e iremos registrando las razones que dan, en las que irán explicitando las propiedades involucradas.

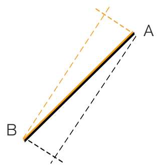
• Discutí con tu grupo y anotá qué procedimientos conocen para construir un rectángulo. En cada caso, indicá qué datos y qué instrumentos se necesitan para construirlo.

A continuación, se transcriben algunos procedimientos que utilizaron alumnos de 6º año/grado para realizar la actividad 2 de la secuencia. Para resolverla, podían recortar, calcar, y disponían de una caja de geometría donde se encontraban todos los instrumentos: escuadras, reglas, transportador y compás.

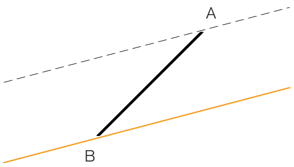
Procedimiento 1:
Desplazando la escuadra construyeron un triángulo rectángulo. Luego, con dos triángulos, compusieron el rectángulo. Cuando terminaron, miraron la figura e intentaron nuevamente, porque... *nos salió cuadrado,* justificaron.

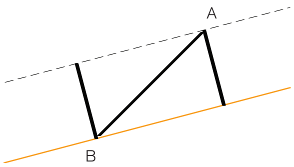


Reprodujeron el mismo procedimiento trasladando la escuadra hasta visualizar el rectángulo, *ahora sí es rectángulo,* afirmaron.

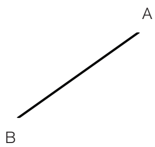


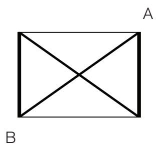
Procedimiento 2:
Trazaron paralelas por los extremos del segmento, luego las perpendiculares y remarcaron el rectángulo.





Procedimiento 3:
Marcaron la mitad de AB, trazaron otro segmento congruente con AB y dibujaron el rectángulo.





Al comunicar los procedimientos y tratar de justificar la construcción del rectángulo se explicitan contenidos tales como el trazado de paralelas y perpendiculares con escuadra, la descomposición del rectángulo en dos triángulos rectángulos iguales, el reconocimiento del paralelismo de los lados opuestos y de la congruencia de diagonales y lados.

En un primer momento, y si bien los rectángulos que se obtienen son distintos, los alumnos atribuyen esta variedad a la diferencia de procedimientos. Pero es la discusión sobre el ítem b) de la actividad lo que permite descubrir que, con esa diagonal, pueden construirse tantos rectángulos como se desee[11]. Ante la pregunta *¿Cómo pueden asegurar que es un rectángulo?* aparecen respuestas como: *los lados opuestos son paralelos y sus ángulos son rectos, tiene ángulos rectos, tiene cuatro ángulos rectos, los lados opuestos son iguales* y *los ángulos son rectos.*

Si bien los alumnos siguen apoyándose todavía en comprobaciones empíricas, también comienzan a usar las propiedades que conocen y consideran válidas para justificar a partir de esas comprobaciones. Por ejemplo, pueden decir *si tiene las diagonales iguales, y que se cortan en el punto medio, seguro es un rectángulo,* aunque todavía no puedan argumentar sobre la validez de esa afirmación.

La actividad 3 permite avanzar en la identificación del cuadrado como un rectángulo particular y volver sobre las propiedades de lados y diagonales de los rectángulos, que podrán terminar de explicitarse en la actividad 4.

Otra forma de promover la explicitación de las propiedades es transformar la consigna de la actividad 4 y que los alumnos tengan que producir un mensaje para que otro alumno construya un rectángulo. Puede ocurrir que los chicos usen como datos la longitud de los lados, el valor de los lados y la diagonal, o sólo el valor de la diagonal, por este motivo es interesante que en el espacio de reflexión propiciemos el análisis sobre la relación entre los mensajes, los datos aportados y las figuras resultantes.

Plantear situaciones para sistematizar propiedades de figuras y cuerpos

Para avanzar en el aprendizaje de las propiedades de las figuras tendremos que proponer, durante bastante tiempo, situaciones en las cuales los niños puedan elaborarlas. Se trata de un proyecto a largo plazo, en el que los alumnos tendrán la oportunidad de enfrentarse a situaciones que les exijan hacer anticipaciones, tomar decisiones basadas en los conocimientos geométricos que tengan disponibles y encontrar nuevas maneras de validar.

Como ya hemos afirmado, describir una figura y construirla a partir de su descripción textual hace posible que los alumnos pongan en juego sus concepciones y busquen nuevas relaciones que les permitirán ir sistematizando ciertas

[11] **Recomendación de lectura:** también es posible construir un rectángulo utilizando como diagonales dos diámetros cualesquiera de una circunferencia. Una secuencia completa al respecto puede encontrarse en el documento de trabajo Nº 5. *La enseñanza de la geometría en el Segundo Ciclo.* Subsecretaria de Educación de la Ciudad de Buenos Aires, Dirección de Curricula, 1998.

relaciones y conceptos que la escuela se compromete a enseñar. La reproducción de figuras supone la búsqueda de relaciones y elementos que las caracterizan, aunque permanezcan implícitas, pero las actividades de comunicación exigen que esas relaciones se hagan explícitas.

Tanto la decisión de pedir datos como de explicitarlos supone, por parte de los alumnos, no sólo el trabajo de identificación de ciertas relaciones, sino la anticipación de algún procedimiento. Aceptar este modo de proceder supone un avance importante en la posibilidad de generalizar las relaciones que se establecen a propósito de las figuras.

Actividades como las siguientes, en las que los alumnos tienen que analizar procedimientos elaborados por otros o enunciar las propiedades que caracterizan o no a una figura, promueven la puesta en juego de sus representaciones mentales acerca de los conocimientos geométricos. Luego de realizar actividades de observación, acción, reflexión e interiorización es posible avanzar hacia la generalización.

“¡A dibujar figuras!”: enunciar las propiedades de distintas figuras.
Materiales[12]**:** 20 tarjetas como las que se muestran a continuación. Papel liso y lápiz para dibujar.
Organización de la clase: grupos de no más de cuatro integrantes.
Desarrollo: se mezclan las tarjetas y se reparten cuatro a cada jugador. Cada jugador analiza sus tarjetas y dibuja a mano alzada una sola figura que cumpla la mayor cantidad posible de propiedades de las tarjetas que recibió. Cuando muestra la figura dibujada al resto del grupo, si estos acuerdan que es válida, obtiene un punto por cada tarjeta tenida en cuenta.

Cuatro lados diferentes	Ningún par de lados paralelos	Cuatro lados iguales	Un par de lados paralelos
Lados consecutivos perpendiculares	Lados opuestos iguales	Lados consecutivos iguales	Un par de lados consecutivos iguales

12 Otras cartas con propiedades de diferentes figuras geométricas están disponibles en Chemello, G. (coord.), Hanfling, M. y Machiunas, V. (2001), *Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender.* (Material recortable para alumnos). En el Material para docentes, pueden encontrarse otras propuestas que permiten trabajar en el mismo sentido.

Un ángulo obtuso	Ningún par de lados perpendiculares	Ningún par de lados consecutivos iguales	Diagonales perpendiculares
Diagonales que se cortan en partes iguales	Diagonales que se cortan en el punto medio	Diagonales iguales	Diagonales oblicuas
Un ángulo agudo	Un ángulo recto	Todos sus ángulos son diferentes	Ángulos opuestos iguales

Luego del juego, se realiza una puesta en común donde se analizará qué tarjetas fueron usadas más frecuentemente y cuáles solían no ser utilizadas. A continuación, y para profundizar las relaciones establecidas a partir del juego, se pueden proponer situaciones simuladas, como la siguiente.

• ¿En qué figura estaba pensando Federico si cuando recibió las siguientes tarjetas, dijo: *Con estas tarjetas no puedo formar más de tres puntos.*

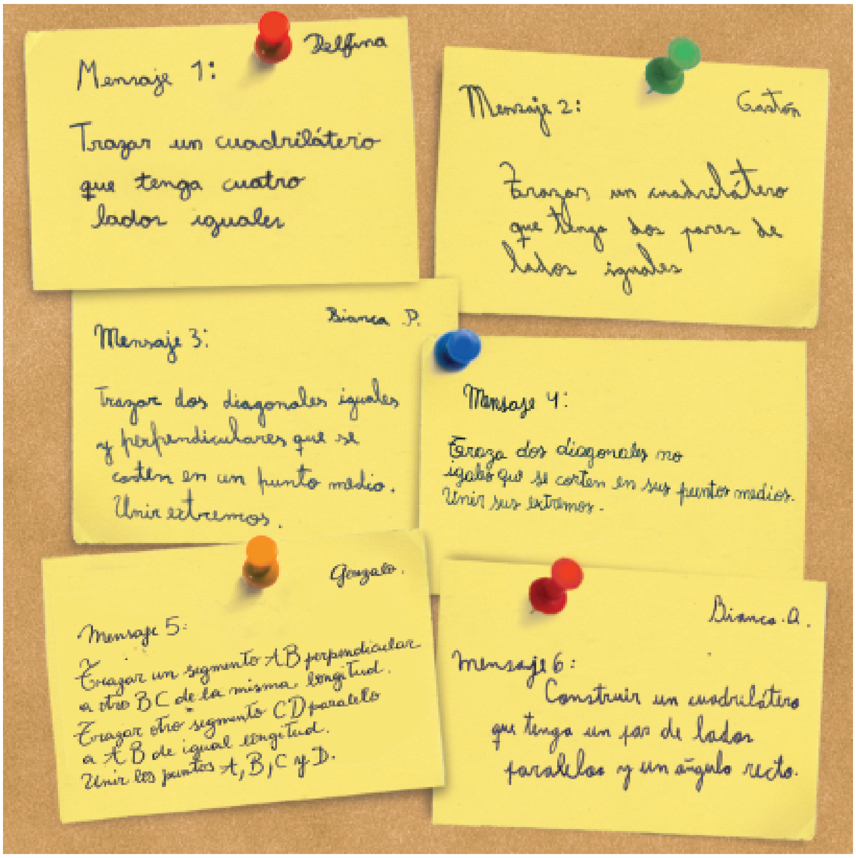
Ningún par de lados iguales	Un ángulo obtuso	Un ángulo agudo	Un par de lados paralelos

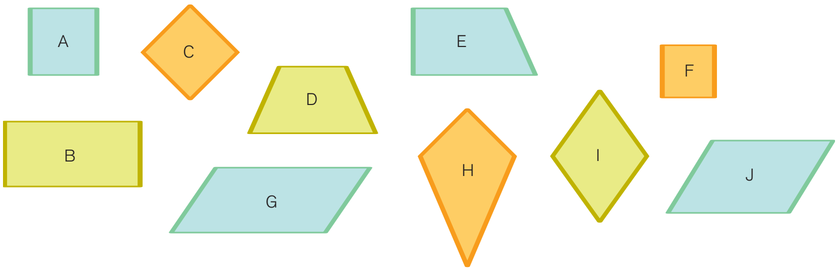
Según el grupo de tarjetas elegidas, en este caso es posible dibujar un paralelogramo, un trapezoide y un trapecio escaleno recto. La pregunta abierta da lugar a que los alumnos den respuestas diferentes, y sobre esas respuestas se podrá seguir discutiendo para llegar a conclusiones que les permiten avanzar en las conceptualizaciones[13].

Además de analizar un conjunto de elementos y propiedades, también podemos considerar procedimientos de construcción, como por ejemplo:

[13] **Recomendación de lectura:** véase Fuenlabrada, I., Block, D., Balbuena H., Carvajal, A. (2000), *Juega y aprende Matemática. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula,* Buenos Aires, Novedades Educativas. Es posible encontrar otras propuestas de juego para trabajar en el mismo sentido.

• Estos son los mensajes que escribieron los alumnos para algunas figuras. Hay que encontrar cuál puede ser el mensaje que corresponde a cada figura.





Los mensajes formulados admiten, por su nivel de generalidad, la identificación de más de una figura. Por ejemplo, las condiciones del mensaje 5 hacen que la figura, independientemente del tamaño, sea un cuadrado. En cambio, el mensaje 2 admite un conjunto de figuras: A, B, C, F, G, H, I y J.

Podremos centrar la discusión en el análisis que permita visualizar el atributo de una clase, es decir que varias figuras pueden pertenecer a un mismo conjunto y una misma figura puede pertenecer a distintos conjuntos. La comparación del mensaje 2 con el 4 permitirá ver que por ejemplo el paralelogramo propiamente dicho pertenece a una clase de figuras por tener dos pares lados iguales y también a otra clase de figuras ya que sus diagonales no son iguales ni perpendiculares. Estas ideas posibilitan ir trabajando de una manera dinámica la inclusión de las clases según los criterios que las definen.

Otro tipo de situaciones que favorecerá la sistematización de las propiedades puede ser una como la siguiente.

• Justificá la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, utilizando contraejemplos en el caso de que sean falsas.
- Un cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales es un cuadrado.
- Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados iguales es un rectángulo.
- Una figura de cuatro lados que tiene un ángulo recto es un trapecio rectángulo.
- Una figura que no es paralelogramo y tiene sus diagonales perpendiculares es el romboide.

La justificación a través de contraejemplos lleva a pensar en las representaciones internas que se han ido construyendo a propósito de diferentes conjuntos de figuras. Esta actividad puede concluirse proponiendo que los alumnos completan afirmaciones del tipo: *En un conjunto de cuadriláteros cuyas diagonales son iguales puede haber un................; En un conjunto de cuadriláteros cuyos lados paralelos son iguales puede haber un............*

El objetivo de estas actividades es que los alumnos realicen clasificaciones explicitando los criterios que determinan las clases. Por ejemplo: lados iguales y ángulos rectos; diagonales perpendiculares y lados opuestos iguales....

En todos los casos, habrá que ordenar las conclusiones a las que se aborde en las distintas actividades en forma de cuadros, listas de propiedades, esquemas, etc.

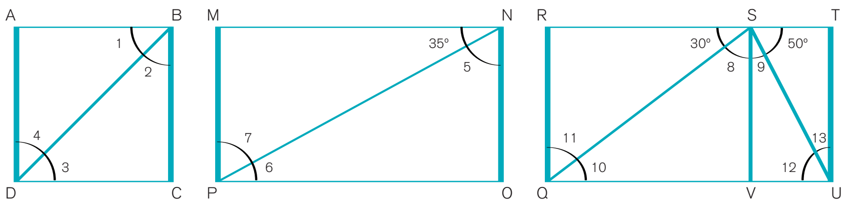
Tal como lo señalamos antes, en este *Cuaderno* se ha desarrollado en profundidad el caso de los cuadriláteros para presentar el sentido del trabajo con las figuras, representadas tanto a través de un texto como de un dibujo, pero las actividades podrían adaptarse para abordar las propiedades de otros polígonos.

En relación con los triángulos, hay dos propiedades que es posible trabajaren 6° año/grado: la propiedad triangular y la de la invariancia de la suma de los ángulos interiores. Para la primera es posible proponer un análisis de casos que los lleve a elaborar una conjetura. Es conveniente que los niños realicen la generalización a partir del análisis de casos, por ejemplo planteando estas consignas de trabajo.

a) Usando segmentos de 3 cm, 4 cm, 6 cm y 9 cm como lados, indicá dos triángulos que se pueden construir y dos que no se puedan construir.
b) Juan encontró en un libro la siguiente afirmación: *Para que se pueda construir un triángulo, la suma de las longitudes de dos de sus lados debe ser mayor que la longitud del tercer lado. Esto debe cumplirse para las tres sumas posibles.*
Comprobá si todos los triángulos que construiste cumplen dicha condición.

Para la segunda propiedad podremos proponer problemas en las que los chicos partan de propiedades conocidas.

Sabiendo que ABCD es un cuadrado y que MNOP y RSVQ, STUV y RTUQ son rectángulos calcular el valor de todos los ángulos marcados.



Para resolver esta situación los chicos pueden razonar a partir de sus conocimientos sobre lados y ángulos de cuadrados, rectángulos y triángulos isósceles y discutir, por ejemplo por qué MNQ y ONP son triángulos iguales. Luego podrán debatir sobre el valor de la suma de los ángulos interiores de todos los triángulos dibujados.

Para avanzar en el conocimiento del proceso de medir

La medida de magnitudes es importante tanto desde el punto de vista social como científico, ya que cumple un rol esencial en la interpretación del mundo físico.

En la resolución de los problemas de medida que enfrentamos a diario, se involucran también muchos conocimientos geométricos, como cuando se diseña un mueble o un folleto, se tiene que cubrir una superficie o se calculan el volumen de una pileta o una distancia en un mapa. Los conocimientos acerca de la medida de magnitudes permiten que los alumnos interpreten y usen datos (relaciones comerciales, lectura de diarios) para tomar decisiones acordes a la realidad, y favorecen de este modo la educación para el consumo.

Desde un punto de vista didáctico, en los *Cuadernos* anteriores la construcción de los contenidos tanto geométricos como de medida se desarrollan por caminos diferentes. Pero es posible llegar a un punto de encuentro cuando se trata de calcular la medida de perímetros, áreas o volúmenes de determinadas figuras o cuerpos geométricos.

Dado el uso social de la medida, en muchas ocasiones la escuela ha descuidado la enseñanza de estos saberes por considerar que pueden aprenderse en relación con el medio. Asimismo, es frecuente que la enseñanza de la medida se centre en las equivalencias entre unidades y en la estructura decimal del sistema de unidades de medida. Muchas veces se evitan las prácticas efectivas de medición y se usa el sistema métrico legal como un saber ya construido, sin dar la posibilidad de compararlo con otros sistemas no convencionales y los alumnos realizan conversiones de unidades apoyándose en reglas mecánicas, y es frecuente encontrar reflexiones como *Para pasar de m a km, ¿voy para la derecha o voy para la izquierda?*

Desde las propuestas curriculares actuales se fundamenta la necesidad de prestar más atención a la estimación y a la medición efectiva para resolver problemas que a la memorización y a la manipulación de fórmulas[14]. En principio, es necesario distinguir las magnitudes físicas vinculadas al espacio, como la longitud, la capacidad y la superficie, en las que se ponen en juego el marco geométrico de otras magnitudes donde la forma de los objetos no influye como variable a tener en cuenta, como en el caso del peso y de la masa. Diferenciar las distintas magnitudes requerirá plantear problemas específicos, ya que es difícil comprender que un objeto es más pesado que otro usando sólo la vista, que un recipiente tiene más o menos capacidad sin haber hecho trasvasamientos o que una superficie tiene igual área que otra de diferente forma sin haber recortado, compensado o haber hecho cubrimientos.

Toda medición tiene un margen de error, si se mide el ancho de una hoja varias veces se puede obtener 19 cm, 19,2 cm, 18,9 cm, aún cuando se utilice el mismo instrumento. En el acto de medir se juegan errores provocados por los defectos de

[14] Un atributo medible es la característica de un objeto que se puede cuantificar. Los segmentos de la recta tienen longitud, las figuras planas tienen superficie, los objetos físicos tienen masa, peso, etc.

la escala del instrumento (errores sistemáticos), errores que se originan en las lecturas de la persona que esta midiendo (errores de apreciación) o errores que no son previsibles (errores casuales), como la temperatura, la presión, etc.

Algunas situaciones que favorecen la construcción del sentido de los problemas de medida son aquellas que permiten trabajar sobre:

- la medición efectiva de los atributos medibles de los objetos (longitud, peso, capacidad, área), abordando la inexactitud de la resultados de las medidas (atribuida al instrumento de medición o al error humano);
- la necesidad de seleccionar una unidad de medida y un instrumento adecuado a la cantidad que se quiere medir, comparando unidades arbitrarias y convencionales para comprender las regularidades del sistema de medición y
- la construcción de referentes comunes de medidas, para hacer comparaciones y estimaciones.

La comprensión y el descubrimiento de las relaciones entre unidades se favorecerá siempre que los alumnos puedan resolver problemas tanto en el marco aritmético como en el geométrico. Abordar las características del Sistema Métrico Legal sin haber realizado mediciones y tratado la expresión de sus resultados con distintas unidades, puede dificultar la comprensión de las regularidades propias del sistema.

De manera general, podríamos decir que al abordar la enseñanza de las distintas magnitudes deberemos incluir actividades que pongan en evidencia la necesidad de determinar una unidad de medida, utilizar referentes en relación a medidas de objetos familiares o unidades antropométricas, usar unidades no convencionales con múltiplos y submúltiplos de esa unidad, y reflexionar sobre las ventajas de la comunicación al contar con unidades legales y con los múltiplos y submúltiplos de esas unidades. Vale aclarar aquí, y en particular en este año/grado, que la presentación del trabajo con distintos tipos de unidades (no convencionales, sean o no antropométricos, y convencionales) no debe entenderse necesariamente en el orden de su evolución histórica ya que solicitar el uso de unidades no convencionales para realizar una medición puede resultar forzado cuando los alumnos conocen y disponen de instrumentos convencionales. Así, deberemos cuidar que las consignas para el trabajo con mediciones efectivas tengan en cuenta que el valor que se busca debe tener sentido en función de la necesidad de tomar alguna decisión en la resolución de un problema y que podrá resolverse usando distintas unidades o instrumentos según lo requiera la situación y no, solamente, en función de una necesidad escolar de trabajar los distintos tipos de unidades.

Si bien en el apartado "Plantear situaciones para analizar las escrituras de cantidades[16]" se desarrolla casi al finalizar este *Cuaderno*, el tratamiento de las equivalencias entre expresiones para una misma cantidad, que llevará en años posteriores a sistematizar la estructura de los sistemas de unidades, debe abordarse de manera articulada con las actividades de los otros apartados del Eje "Geometría y medida". Este trabajo de análisis de escrituras requiere que las equivalencias hayan sido producidas por los propios alumnos al resolver problemas que involucren mediciones o cálculos de medidas.

Plantear situaciones para estimar, medir y expresar cantidades

La **estimación** es una estrategia de pensamiento, es un proceso mental en el que confluyen la intuición y la lógica para resolver problemas de la vida cotidiana. Si bien el término *estimación* tiene múltiples usos, podemos decir que la estimación en matemática es el juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite[17].

Estimar la medida de una cantidad es el proceso por el cual se obtiene una medición sin necesidad de utilizar instrumentos. En algunos casos, la estimación consiste en comparar dos cantidades, como cuando un conductor estima si es posible estacionar su auto en el espacio que hay entre otros dos. En otros casos, requiere del empleo de unidades de medida, como cuando le explicamos a un turista la distancia a la que se encuentra de un determinado centro turístico.

Los procesos de estimación son muy frecuentes en las actividades de nuestra vida diaria, la mayor parte de las personas realizan estimaciones y algunas llegan a ser expertas en la tarea de estimar en determinados contextos. Así, por ejemplo, habitualmente utilizamos o escuchamos expresiones como *En quince minutos podés llegar caminando; Queda a diez cuadras, es casi un kilómetro; Esta mesa no va a pasar por esa abertura, mide más de 1,20 m de ancho; Juan no pasa por esa puerta, mide más de dos metros; Luego de tres minutos de cocción, el huevo está listo para comer; La temperatura es bajo cero, el pasto está congelado; Con cinco litros de pintura les alcanza para pintar las habitaciones de la casa; Le doy 4 manzanas grandes, eso es aproximadamente un kg.*

[16] El citado apartado es el último de este Eje.
[17] En Segovia, I. Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989), *Estimación en cálculo y medida.* Madrid, Síntesis.

En determinados oficios o profesiones el uso de la estimación es importante para realizar diversas tareas, lo que implica una interiorización de determinadas unidades y referentes[18] que permiten llegar a estimaciones de cantidades con una gran precisión. Por ejemplo:

- La compra o venta de un fertilizante, un insecticida, un abono o semillas, supone una estimación previa por parte del agricultor, del jardinero o del comerciante. Dicha estimación lo llevará a comprar o vender la cantidad mínima, pero que sea la suficiente.

El abono se compra por kilo, pero a la hora de distribuirlo en cada planta, suele ser complicado pesar para cada planta 1 o 2 kg. Para solucionarlo, muchas veces se recurre a la cantidad de abono que puede contener, por ejemplo, una lata, entonces se utiliza el recipiente como unidad de referencia, y para tal fin se lo pesa y se lo utiliza para estimar la cantidad de latas que se deben echar por cada planta (una lata, una lata y media).

- La información que nos llega a través de los servicios meteorológicos sobre la temperatura en tal o cual ciudad, nos dice, por ejemplo que la máxima fue de *x* grados centígrados, pero no se da a conocer exactamente el lugar de medición o las condiciones en las que se tomó. No es extraño, entonces, que en otros puntos de la misma ciudad, la temperatura difiera en varios grados. La velocidad del viento o la lluvia caída también son datos aproximados, puesto que el viento no tiene siempre la misma velocidad ni llueve en forma uniforme en todos los lugares.
- La compra de comida, el equilibrio del presupuesto familiar, la previsión de gastos extras, la búsqueda constante de comercios donde los gastos se minimicen son otras actividades donde es necesario estimar.

Los procesos de estimación son importantes para incluirlos en la enseñanza por su utilidad práctica, y por la formación que propicia en el alumno en relación con el conocimiento de la medida. Además, ofrecen una visión según la cual en matemática son válidos los resultados aproximados, siendo esta razón tan válida como las anteriores.

Con el fin de que los alumnos realicen estimaciones, es necesario que estén familiarizados con una buena colección de referentes. Algunos referentes pueden ser su propio peso, altura, longitud de su pie o la palma de su mano, la tira de $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{10}$ metros, las baldosas, los azulejos, el papel glasé (1 dm^2), la cuadra, el balde de 10 litros, latas de pintura (dal), el litro (jarras o botellas), el tanque de

[18] **Recomendación de lectura:** véase Bressan, A. M., Bogisic, B. (1996), *La estimación, una forma importante de pensar en matemática,* Documento curricular N° 1. En dicho documento se explicita que *los referentes son objetos usuales (tazas, baldosas, goteros, etc.) o partes de nuestro cuerpo (brazos, palmas, pies, etc.) con los cuales es posible establecer una correspondencia con las unidades convencionales.*

agua de las casas (1000 litros), el termotanque (1 hl). Conocer el orden de magnitud de su propia altura, de la longitud de sus pasos (normales), de la capacidad de una copa, de una taza, de ciertas distancias domésticas o geográficas, etc. permitirá realizar estimaciones.

Por ejemplo, al estimar la altura de la puerta se puede pensar que es de 1m y un poco más (más o menos) en relación al referente (altura de la persona). Si, por ejemplo, la altura de una persona es de 1,60 m, entonces la altura de la puerta será de 1,60 m más 40 cm, es decir aproximadamente de dos metros, o por ejemplo, para estimar la altura de una ventana se puede pensar *es más de la mitad de mi altura* ($\frac{3}{4}$ *partes), aproximadamente 1,20 m.*

Todo lo expuesto hasta aquí fundamenta sin duda la inclusión de la estimación en la enseñanza de la matemática. Su importancia no radica sólo en poder obtener una respuesta aproximada antes de efectuar un cálculo, sino también como herramienta de comprobación de resultados, como recurso para la enseñanza de la medida y para determinar si una respuesta es o no razonable al resolver un problema.

Por otra parte, la estimación permite a los alumnos considerar en el cálculo matemático el doble carácter de exacto y aproximado. Para ello, es importante que propongamos actividades que permitan apreciar en qué situación conviene utilizar una u otra. Algunos términos, como *aproximadamente, casi, más cerca de, entre, un poco menos que* dan cuenta de que la matemática no se funda solo en la exactitud. Las siguientes, son algunas actividades que podrían proponerse:

- En un negocio donde hay un cartel que dice *rebajas del 5 % por fin de temporada,* una camisa cuesta $ 165. Si Juan tiene $ 150, ¿le alcanzará para comprarla?

- Ana pinta una pared en 2 horas. María pinta la misma pared en 4 horas, si las dos trabajan juntas ¿cuánto tiempo emplearán?

En el primer problema, al hacer la estimación del precio para saber si es posible comprar la camisa, es importante observar con los alumnos que se deben descontar $15 para poder comprarla. Pensar en el 10% (se puede calcular fácilmente $16,5) puede servir para pensar que el 5% es la mitad, en cuyo caso el descuento será un poquito más de $ 8, pero es menor que los quince pesos de descuento que necesita.

En el caso del cálculo de tiempo, un error frecuente de los alumnos consiste en aplicar mecánicamente el promedio y decir que demoran 3 horas. En este caso, es necesario discutir respecto del resultado, ya que ambas personas pueden trabajar en forma conjunta de manera tal que si una persona demora dos horas y tiene alguien que la ayude, seguramente empleará menos de las dos horas, por lo que el modelo de la proporcionalidad puede no ser adecuado para dar una respuesta precisa en cuanto a la relación trabajo manual, cantidad de personas y tiempo.

Otra actividad en la que se propone analizar estrategias de estimación es la siguiente situación:

• Juan estaba entusiasmado leyendo un libro, y se dio cuenta de que en una hora había leído 20 páginas. Entonces, quiso saber cuántas palabras por minuto era capaz de leer. Para empezar a resolver el problema, a Juan se le ocurrieron distintos procedimientos:
a) Cuento todas las palabras de las diez hojas, y las divido por 60 minutos.
b) Cuento las palabras que puede haber en una página, luego las multiplico por las 20 páginas y al final divido por los 60 minutos.
c) Cuento los renglones de una página (varias veces para estar seguro), luego las palabras que hay en un renglón (varias veces) y en distintos renglones. Y multiplico ambos números. A ese resultado lo multiplico por las 20 páginas que leí y lo divido por 60.
¿Qué opinás acerca de las estrategias que pensó Juan? ¿Le permitirán resolver el problema? ¿Cuál elegirías?

A continuación, presentamos una transcripción del trabajo con la consigna anterior, realizado por un grupo de alumnos de 6º año/grado.

Registro de clase

En la clase, se producen discusiones en pequeños grupos respecto de las tres estrategias. En un grupo donde discutieron la estrategia a), dijeron:
Alumno A: –*No podés contar todas las palabras... de todas las hojas.*
Alumno B: –*Son muchas para contar una por una, no terminás nunca y seguro que te confundís.*
En el grupo, cuando discutieron la estrategia b) dijeron:
Alumno C: –*Yo ya probé, te perdés.*
Alumno D: –*Contemos callados, y vemos si nos da parecido.*
Alumno E: –*Me dio como quinientas.*
Alumno F: –*Mirá que no siempre te va a dar igual la cantidad de palabras...,*
(Se ponen de acuerdo entre ellos.)
Alumno C: –*Vos contá renglones de la página 1, vos de la 2 y nosotros dos contamos las palabras que hay en 5 renglones.*
En el tercer grupo, al considerar la estrategia c), dijeron:
Alumno G: –*Esta forma me parece, más rápida y segura.*
Alumno H: –*Renglones por cada página hay 42, 39, 40, 40, porque en*

alguna hojas hay títulos y espacios..., redondeamos en 40, más o menos.
Alumno I: *–Las palabras dan 10, 11,13, 12, 12, 11, 12, 11, 13 y ... hagamos las cuentas con 12. Estos resultados van a ser más o menos..., no son exactos..., tampoco leemos tanto, porque al final te cansás.*
Alumno J: *–Nos da 12 x 40 = 480 en una página, en 20 nos daría 9600 palabras... ¡tantas! Eso es en una hora entonces… en un minuto… dividí por 60... te da 160 palabras.*
Alumno K: *–A mí me da 11 por 42, que es igual 462 palabras en una página, entonces en 20 da 9240 y al dividir por 60 minutos te da 154 palabras en un minuto.*
Al finalizar la discusión, la maestra organizó la discusión en plenario. Se discutieron algunos cálculos, llegando a la conclusión que el resultado está cercano a los ciento cincuenta. Los alumnos observaron que los resultados están en el orden de magnitud de las 154, 160, 164 palabras por minuto y que varían entre 4, 6 y 10 palabras.
Los resultados expresan que esta cantidad de palabras es menor (en promedio) que la cantidad de palabras que hay en un renglón. Algunos alumnos propusieron verificar si más o menos el resultado es razonable, midiendo el tiempo. Sugirieron que en los diferentes grupos unos integrantes leyeran silenciosamente una hoja, y que otros integrantes midieran el tiempo (un minuto). La docente dio lugar a dicha propuesta, porque consideró que los resultados obtenidos necesitaban de una validez experimental. Además, les propuso averiguar este dato, ya que había una propaganda de TV sobre lectura veloz, donde seguramente aparecía el mismo.

En esta actividad se trabaja con magnitudes discretas (cantidad de palabras, renglones) y con una magnitud cociente que es la cantidad de palabras por minuto que mide la velocidad de lectura. En el trabajo que realizaron los alumnos se observaron expresiones que dan cuenta de las posibilidades que brinda esta situación para que discutan especialmente sobre la estrategia que llevará a estimar la cantidad de palabras por página, calcular la cantidad de palabras en las 200 páginas, reflexionar sobre resultados aproximados, distribuir tareas para recuperar datos, extrapolar resultados de una muestra, pensar en la razonabilidad de los resultados y procedimientos óptimos, necesidad de construir referentes a través de la experiencia.

Tal como se afirmó al desarrollar el Eje "Número y Operaciones", es en las situaciones de estimación, medición efectiva y cálculo de medidas que las expresiones fraccionarias y decimales adquieren sus primeros significados para los chicos, ya que el uso social más difundido de estas escrituras está asociado a medidas de longitud, superficie, peso, capacidad y tiempo.

Otras actividades, como la siguiente, permiten avanzar en la conformación de un repertorio de referentes para las distintas magnitudes.

• Subrayá las respuestas más razonables para cada caso y explicá tus razonamientos.

a) El número de alumnos de una clase de escuela es:

5	25	100	250

b) Juan recorre 60 Km en auto y demora:

5 minutos	1 hora	300 minutos	10 horas

c) Para coser una cinta en los bordes de un repasador hay que comprar:

15 m de cinta	15 dm de cinta	15 cm de cinta	1,5 m de cinta

d) En un kg de naranjas entran:

5 naranjas	50 naranjas	8 naranjas

En estos casos, podemos proponer discutir si las soluciones son o no razonables en función de un contexto. Para el caso a) la experiencia personal de los alumnos hace que elijan el 25 como respuesta más razonable respecto a la capacidad del aula, argumentando que sería imposible que entren 100 ó 250 alumnos en un aula, pero sí podrían ser 5 los alumnos de una clase aunque no sea lo más normal. Para el caso b), algunos argumentos posibles se referirán a la imposibilidad de realizar 60 km en 5 minutos, una hora sería razonable, aunque si se hace una pausa en el camino, también se podría demorar 5 horas (300 minutos) o 10 horas. Para el caso c), se descartan 15 m y 15 cm en función de la representación del tamaño del repasador y eligen 1,5 m o 15 dm. Es probable que descarten 15 dm, ya que no es común tener la representación de esa cantidad como un valor de referencia. Luego, la reflexión acerca de cuántos dm hay en un metro, permitirá discutir sobre las equivalencias de dichas expresiones e incorporar esa respuesta como razonable. Para el caso d) es posible descartar fácilmente las 50 naranjas, no así para el caso de 5 y de 8 naranjas, puesto que habría que recurrir a mediciones o contar con alguna experiencia previa que nos permita dar la respuesta.

En la actividad siguiente, los alumnos tendrán la posibilidad de estimar y mejorar sus estimaciones a partir de determinar los referentes y confrontar datos.

• a) Resolvé en forma individual
En un campamento escolar, se prepara comida para 300 chicos. Para el postre se quieren servir naranjas, y para eso necesitan calcular cuántos kilos tienen que comprar como mínimo para que no le falta a nadie. La encargada de la cocina se plantea estas preguntas: ¿Cuánto puede pesar una naranja? ¿Cuántas naranjas entran en un kilo?
Formen un grupo y armen una tabla con los datos que aporta cada uno.

Plantearles a los alumnos esta situación podrá generar la discusión acerca de cómo hacer para estimar el peso de una naranja y qué caminos se pueden recorrer. Es posible que los alumnos comenten: *No sé cuánto pesa una naranja, No todas las naranjas son iguales, por lo tanto pesarán distinto; Hay naranjas más chicas que otras; Si son grandes, entran menos en el kilo.* Los alumnos podrán concluir que aún pesando una naranja no es posible generalizar y por lo tanto la respuesta será aproximada.

Como tarea para el hogar, el docente podrá pedir que los chicos pesen una naranja y un kilo de naranjas y cuenten cuántas entran en el kilo.

• Con los datos de que trajo cada uno de los integrantes de tu grupo confeccionen una tabla como la siguiente:

Alumno	Peso de 1 naranja	Cantidad por kg

• a) Analicen la tabla y respondan
- El peso de una naranja ¿entre qué valores está?
- El número de naranjas que entran en un kilo ¿entre qué valores está?

b) Comparen los datos de las dos tablas y elijan valores para responder a las preguntas que se hizo la encargada de la cocina

En la reflexión final de la actividad sería interesante plantear por qué el promedio es una estrategia válida y cuáles son los referentes que sirven en este caso para lograr una mejor aproximación.

Con respecto a las actividades que favorecen la comprensión del **proceso de medición**, tal como se afirmó en *Cuadernos para el aula: Matemática 5*, en cuanto a longitudes, pesos y capacidades proponemos continuar con el uso de equivalencias de unidades para estimar el resultado de un cálculo, la equivalencia de cantidades, la reflexión y el análisis de las escrituras, y avanzar sobre algunos conocimientos de las magnitudes bidimensionales, como la superficie.

La incorporación de nuevos contextos llevará a conocer nuevas unidades y equivalencias para enriquecer el repertorio conocido, sin necesidad de presentar, por ejemplo, las unidades de capacidad para usarlas luego en la resolución de algunos ejercicios sobre equivalencias.

En el apartado "Plantear situaciones para analizar la escritura de cantidades" se desarrollan actividades en las que se avanza recuperando las unidades que se utilizaron en la resolución de distintos problemas para completar luego las que falten apoyándose en la estructura decimal de los agrupamientos.

En relación con el tratamiento de las magnitudes de superficie y volumen, Vergnaud[19] y sus colaboradores afirman que pueden ser tratadas de dos formas:

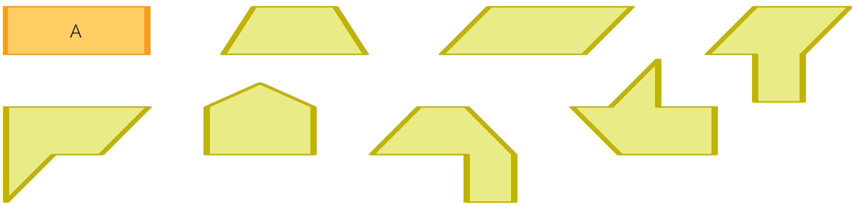
- de modo unidimensional: es esencial que este aspecto unidimensional sea organizado como objeto de estudio y de reflexión. En este caso, la medida se obtiene por comparación directa de dos cantidades de magnitudes homogéneas, por ejemplo una superficie con una baldosa, para saber cuántas baldosas entran en una superficie y así determinar el área en función de esa unidad.
- como producto de medidas: en este caso, para encontrar el área de un rectángulo, multiplicamos la medida de sus lados y para el caso de hallar el volumen de un paralelepípedo multiplicamos la medida de sus tres dimensiones.

[19] Vergnaud, Gérard (1990), La Teoría de los Campos conceptuales en Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 10 N° 2,3 pp. 133-170.

Los problemas de productos de medidas nos permiten profundizar el sentido de la multiplicación de dos números racionales en el contexto de la medida. La medición produce nuevos significados para los números y las operaciones, por ejemplo para la determinación del área de un rectángulo se involucran el producto de medidas.

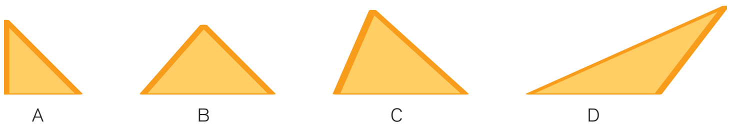
En 5º año/grado, los alumnos seguramente trabajaron con cubrimientos[20] por ejemplo, observar y discutir sobre las formas planas que mejor cubren la figura dada, subdividir una figura en partes e iterar la misma para medir. También es posible que hayan realizado comparaciones directas e indirectas después de descomponer y realizar trasformaciones para conservar el área o para obtener figuras con áreas, dobles mitades, triplos, etc. Para eso, se pueden proponer actividades como las siguientes.

• a) ¿Cuáles de las siguientes figuras pueden ser transformadas a partir del rectángulo A?



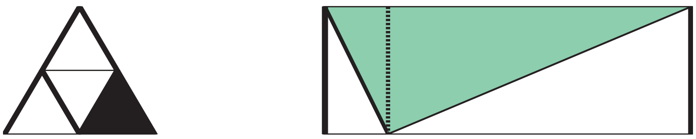
b) Partiendo del rectángulo A, encontrá y dibujá otras figuras diferentes a las anteriores.

• Tomando como base los triángulos A,B,C y D contruí cuadriláteros cuya área sea igual al doble de las figuras.



[20] **Recomendación de lectura:** actividades de este tipo pueden encontrarse en el apartado "Plantear situaciones para estimar, medir y expresar cantidades" de *Cuadernos para el aula: Matemática 5.*

• ¿Qué relación existe entre el área de la figura pintada y la figura base? Explicá cómo lo pensaste.



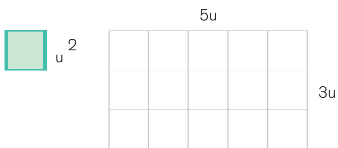
• Analizá, para cada par de figuras, si es cierto que para hacerlas se necesita la misma cantidad de cartulina.

a.

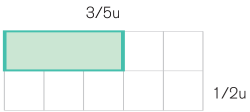
b.

Asimismo, podremos ofrecer actividades en las que haya que cubrir el plano con diferentes unidades para discutir sobre la forma más adecuada para medir el área de una figura dada, y otras en las que se usen *unidades convencionales,* como el cm^2, trabajando por ejemplo sobre papel cuadriculado, y se expliciten algunas las relaciones de los múltiplos y submúltiplos del m^2. En este caso, también se puede incluir la medición de formas irregulares, aproximando el valor de cantidad y utilizando diferentes unidades de medida. Por ejemplo, calcular la superficie de la palma de la mano en una hoja centimetrada y milimetrada.

En 5º año/grado los alumnos seguramente ya calcularon el área de cuadrados y rectángulos, utilizando una "multiplicación" que tiende a la sistematización del procedimiento para multiplicar el largo por el ancho, que luego será la fórmula del área. En 6º año/grado es importante recuperar y fomentar el desarrollo y la reflexión de diferentes estrategias, aditivas y multiplicativas. Sabemos que cuando los lados del rectángulo son números enteros, la unidad de área (1 u^2) es el cuadradito cuyo lado mide 1 u y para determinar el área de un rectángulo, pueden aparecer procedimientos aditivos, donde se cuenta la cantidad de cuadraditos: *hay tres filas de cinco es decir 5 + 5 + 5* (o cinco columnas de tres), o procedimientos multiplicativos.



Si, en cambio, planteamos un problema para calcular el área de un rectángulo, donde las medidas de los lados son números no enteros, racionales o decimales, la comprensión de la medida del área no resulta simple. Por ejemplo, pensemos en hallar el área de un rectángulo cuya base mide $\frac{3}{5}$ de unidad y la altura $\frac{1}{2}$ de unidad.



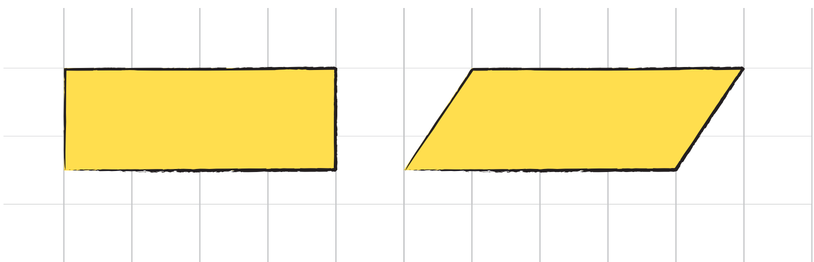
El área pintada del rectángulo son 3 cuadraditos, donde cada uno representa la décima ($\frac{1}{10}$) parte del rectángulo "unidad". La fórmula que permite calcular el área sigue siendo válida ($\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$) pero es poco evidente en lo que respecta a la interpretación de la misma, ya que hay un cambio de unidad. El cuadradito ahora es $\frac{1}{10}$ del rectángulo unidad, y es difícil comprender esta relación sin tener la referencia de esta nueva unidad.

Para comprender este problema, es necesario que los niños estén familiarizados con el concepto de medida, tengan experiencias de mediciones directas del área, y hayan explorado la relación entre las medidas de los lados y el área para valores enteros.

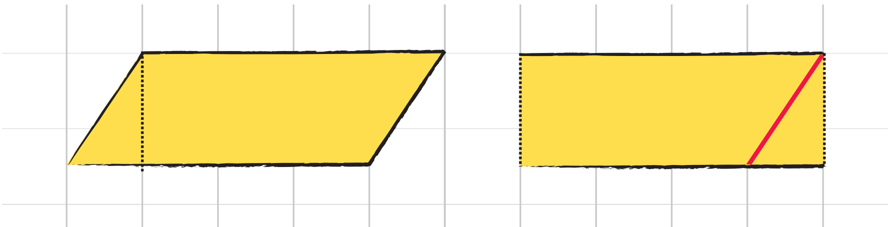
En el apartado "Plantear situaciones para elaborar y comparar diferentes procedimientos de cálculo" de este *Cuaderno* se han analizado procedimientos que los niños elaboran para multiplicar fracciones. Este contexto permite darle sentido a dicha operatoria y avanzar hacia la sistematización del procedimiento.

Para avanzar en la sistematización de otros procedimientos para el cálculo de áreas es necesario que los alumnos puedan comprender que el producto de las medidas de los lados de un rectángulo o cuadrado permite optimizar el cálculo del área. Por ejemplo, para el caso del paralelogramo se propuso, en un 6º año/grado, la siguiente actividad.

• Dado un rectángulo de 4 cm de largo por 1,5 cm de alto y un paralelogramo de igual base y altura a los lados del rectángulo, ¿es posible utilizar lo que sabés del área del rectángulo para calcular el área del paralelogramo?



Algunos alumnos encuentran que es posible transformar el paralelogramo en el rectángulo como se muestra en el siguiente dibujo y luego miden los lados del nuevo rectángulo. Otros miden y luego multiplican los lados del paralelogramo (4 cm x 2 cm = 8 cm^2). También pueden hacer el conteo de los cm^2 y de los $\frac{1}{2}$ cm^2 ó $\frac{1}{4}$ cm^2.



Ante la diferencia de los resultados, especialmente para la estrategia que multiplican los lados del paralelogramo, una docente planteó la siguiente discusión respecto de la relación entre la medida de los lados del rectángulo y la de los lados del paralelogramo.

Registro de clase

Docente: *–¿Cómo es posible que el cálculo del área del rectángulo les de, a algunos alumnos, 6 cm^2 y a otros, 8 cm^2?*
Alumno A: *–Nos da diferente porque multiplicamos lados diferentes (4 x 1,5) y ellos 4 x 2,...).*
Alumno B: *–El lado del paralelogramo quedó adentro de la figura, es de donde lo pegamos...*
Alumno C: *–Lo que mide 1,5 cm es este segmento* (Señala el segmento punteado de la primera figura.) *por donde cortamos el triangulito que trasladamos.*
Docente: *–¿Qué relación existe entre el ancho y el alto de ambas figuras?*
Alumno D: *–Las bases, lados de abajo, se mantienen cuando los superponemos.*
Alumno E: *–Cuando superponemos las dos figuras, las bases coinciden y el alto de las dos también es igual (1,5 cm) y eso te da la cantidad cuadrados de 1cm^2.*

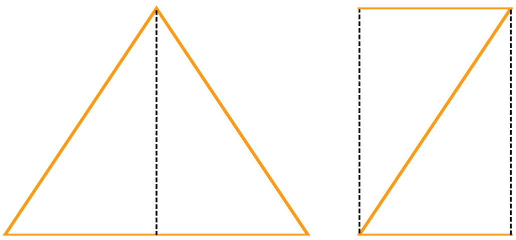
Estas reflexiones de los alumnos son las que permiten luego llegar a comprender que la expresión *base por altura* o *ancho por alto* es útil para calcular el área del paralelogramo. La docente intervino recuperando las ideas respecto de la altura de ambas figuras y explicitó que la altura del rectángulo es la misma que la altura del paralelogramo y que en el caso del rectángulo, el valor de uno de los lados es el valor de la altura, lo cual no ocurre en el paralelogramo. Es decir, el valor del lado y la altura del paralelogramo no son coincidentes.

Así, el trabajo de búsqueda de áreas equivalentes, dobles o mitades, las transformaciones de unas figuras en otras de áreas equivalentes permiten el cálculo de áreas de otros polígonos. Cabe señalar que no es necesario presentar las fórmulas, basta con poder explicitar las relaciones entre las datos iniciales, las medidas de la figura transformada y la relación entre las áreas. La posibilidad de generalizar[21] un procedimiento para una misma clase de figuras, como por ejemplo los triángulos, aun cuando tengan distintas propiedades (isósceles o no, obtusángulos, rectángulos o acutángulos) y establecer fórmulas, requiere de una exploración bastante intensa sobre casos particulares y de la discusión, a partir de intervenciones específicas del docente, sobre la posibilidad de usar una misma estrategia para figuras de distinta forma. Asimismo, habrá que variar las medidas utilizando primero valores que permitan establecer relaciones fácilmente para luego avanzar con otras expresiones.

Como ejemplo del tipo de trabajo que podemos plantear para otros polígonos, se presentan a continuación los procedimientos para calcular el área de un triángulo isósceles de 3 cm de altura y 4 cm de base. Los procedimientos fueron realizados por tres grupos diferentes de niños y los relatos siguientes fueron expresados por los representantes de dichos grupos.

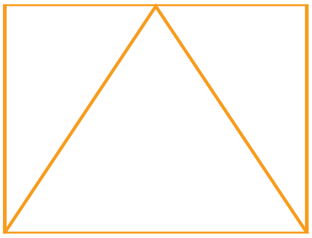
Registro de clase

Leila: –*Nosotros lo cortamos por la mitad y después pusimos uno al lado del otro formando un rectángulo. La altura del rectángulo es la misma que la del triángulo pero la base es la mitad, así que el área es dos por tres.*

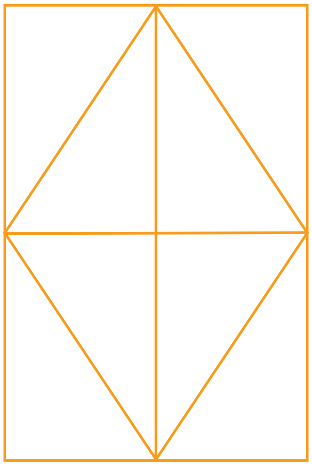


[21] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "La gestión de la clase" en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

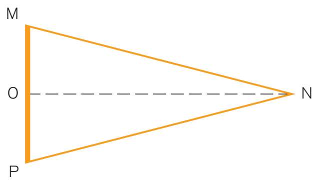
Ilan: *–Nosotros armamos un rectángulo alrededor. La base del rectángulo es de cuatro y la altura de tres, pero el rectángulo es más grande, es el doble, así que después hay que hacer la mitad… doce. dividido dos… seis.*



Fernando: *–El otro día hicimos el área de un rombo multiplicando las diagonales y dividiendo por dos, así que nosotros armamos un rombo con dos triángulos. Las diagonales son de seis y de cuatro, seis por cuatro veinticuatro dividido dos son doce. Como son dos triángulos, cada uno mide seis.*



A partir del análisis de estos procedimientos utilizados por los alumnos, la maestra propuso a cada grupo que *Escriban un instructivo para describir uno de los tres procedimientos y luego se lo entreguen a otro grupo para que calcule el área de MNP, sin hacer nuevos dibujos o recortes.*

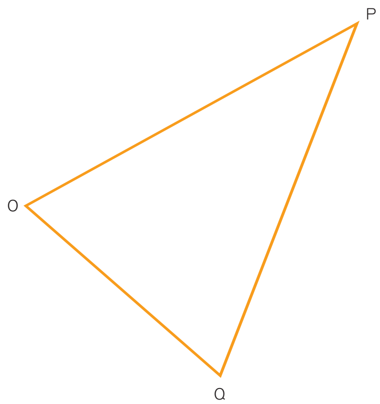


MP = 1,8 cm   ON = 3,5 cm

En una discusión compartida por todo el grupo, compararon los instructivos y los cálculos. Esto permitió comprobar la equivalencia entre lo realizado por cada grupo de chicos y posibilitó que surgieran diferentes producciones, como por ejemplo *altura del triángulo x $\frac{1}{2}$ de la base del triángulo,* o bien *base del triángulo x altura del triángulo, dividido 2* como así también $\frac{1}{2}$ *de base del triángulo x doble de la altura del triángulo dividido 2*

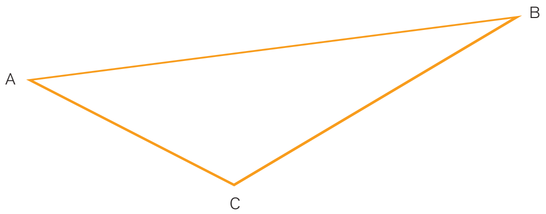
Para continuar, retomando los instructivos recientemente elaborados por los grupos, se podría proponer discutir *cuáles de esos instructivos sirven cuando el triángulo no es isósceles* o *cuando se dan otros datos.* De esta manera, estamos iniciando una nueva exploración en la que primero promoveremos que los alumnos anticipen y luego pasaremos a las comprobaciones que podrán ser a través del cálculo sobre figuras de análisis y, eventualmente, a través de mediciones o recortes de papel. Por ejemplo:

• a) ¿Qué medidas tendrías que tomar para calcular el área de OPQ, sabiendo que OP = PQ y que PQ mide 5 cm?



b) Si PQ midiera 5 cm, pero el triángulo no fuera isósceles, ¿qué medidas tomarías?

• Para calcular el área de este triángulo, Ana dice que lo transforma en un rectángulo de base AB y divide por 2. Mirta afirma que es más fácil transformarlo en un paralelogramo de base CB y también dividirlo por 2.
a) ¿Qué medidas toman Ana y Mirta?
b) ¿Qué cálculos hacen?



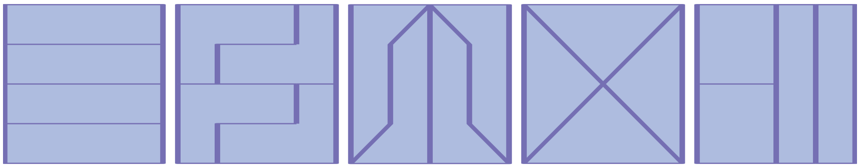
Otra posibilidad sería, que elaboren instructivos para el nuevo triángulo, o bien mostrar a los alumnos los procedimientos realizados por Leila, Ilan y Fernando y pedirles que determinen si son correctos o no y por qué haría que luego elaboren los nuevos instructivos correspondientes.

Un aspecto a tener en cuenta es el significado que dan los alumnos a las expresiones base y altura, ya que cuando los dibujos se presentan siempre en la misma posición esto lleva a asociar la base con un segmento horizontal y la altura con uno vertical. Asimismo, habrá que descubrir que en un mismo triángulo se pueden identificar tres pares de datos que permiten calcular el área.

Plantear situaciones para avanzar en la exploración de relaciones entre perímetros y áreas

Al iniciar el trabajo con áreas y perímetros, un aspecto importante a considerar es la diferenciación entre ambos conceptos. Esa confusión entre áreas y perímetros provoca, muchas veces, que las medidas del perímetro y del área aparezcan intercambiadas entre sí. Por ejemplo, el área muchas veces aparece expresada en centímetros y no en centímetros cuadrados, como si sólo fuera un problema de denominación. Por otro lado, los alumnos suponen la existencia de alguna vinculación entre ambos y tienden a pensar que la variación de uno de estos atributos implica la modificación del otro en la misma relación. Por ejemplo, si aumenta el área, aumenta el perímetro, si mantenemos el área, se mantiene el perímetro.

• ¿Es posible que las partes en las que se han dividido los cuadrados de las tarjetas tengan igual área? ¿Cómo lo justificás?



Al resolver esta situación los chicos pueden desplegar algunas estrategias tales como:

- Comparar las figuras A y B y justificar que las mitades en ambos casos son iguales ya sea porque las superponen o porque observan que ambas mitades tienen la misma forma.
- Transformar la figura base de B, en la figura base de A, compensando la superficie, trasladando “el cuadradito” (lo explican dibujando sobre la ficha o recortando y trasladando).
- Tomar el cuadradito como “unidad de medida” y justificar diciendo *este cuadradito entra cuatro veces en la figura base de B y también en la figura base A* (algunos alumnos se valen del papel cuadriculado para hacer la reproducción de la figura y poder explicar sus argumentos).
- Justificar la congruencia de parte de la figura A y E rotando una de las figuras y descomponiendo en mitades los dos cuadrados para cubrir los otros dos rectángulos.
- Compensar las áreas, por ejemplo al analizar la figura C dicen *este triangulito que sobra de acá falta allá para formar la letra ele* (señalando la figura B).
- Reconocer la misma forma contenida cuatro veces en el cuadrado en las figuras A, B, C y D
- Componer con distintas figuras diciendo: *está formada por un rectángulo grande y los triángulos de los costados,* calcar y superponer para mostrar la congruencia.

Al desarrollar esta actividad, los alumnos suelen expresar sus conclusiones con expresiones tales como:

- No parecía que todas fueran un cuarto del cuadrado.

- No parecían porque tenían formas diferentes, pero midiendo (se refieren a las compensaciones) nos dimos cuenta que valían lo mismo, la cantidad de cuadraditos es la misma, cortados o enteros.

- Las mitades de D parecen más grandes que las de A, B, C y E, pero...las dos son mitades y el cuadrado es el mismo... tienen que ser iguales...

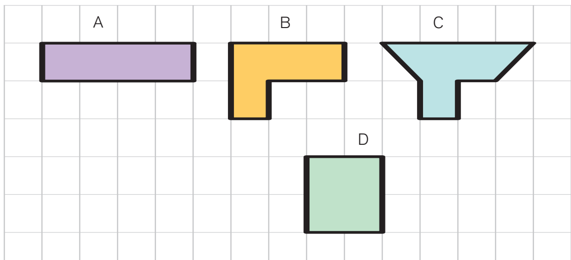
- Si contás uno por uno (figura C) los cuadraditos que están enteros y después le sumás los que están en mitades te dan la misma cantidad.

En los casos en los que persistan las dudas, podremos sugerir que reproduzcan las figuras en papel cuadriculado para verificar midiendo (contando los cuadraditos que conforman cada figura base) o bien armar una cuadrícula sobre la figura dada.

De las discusiones planteadas es posible llegar a la conclusión que *Las figuras de formas diferentes pueden tener igual área.*

Esta segunda actividad apunta a focalizar sobre los perímetros de figuras de diferente forma e igual área. Para desarrollarla, los alumnos deberán tener disponible papel cuadriculado, que pueden usar o no. Es importante aclarar que todos los grupos tienen las mismas figuras.

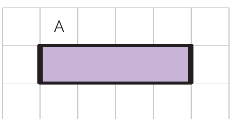
- Las figuras A, B, C, D y E tienen diferentes formas pero igual área. Averiguá si todas tienen el mismo perímetro. Justificá tu respuesta.



Al resolver esta consigna, los chicos suelen afirmar, por ejemplo, que para la figura A *hay 4 cuadraditos más 4 cuadraditos más los otros dos son diez cuadraditos.* Para aclarar esta confusión entre lados y cuadraditos es conveniente que intervengamos preguntando *¿dónde están los diez cuadraditos?* o bien, *¿y esos 10 cuadraditos ¿cuántos cm son, aproximadamente?*

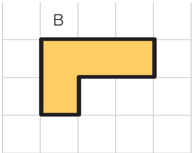
Al responder, es posible que los chicos aclaren que se referían a la longitud del lado o traduzcan ese valor a cm, tomando la longitud del cuadradito como $\frac{1}{2}$ cm.

Estos fueron algunos procedimientos que utilizaron los chicos para calcular el perímetro de cada figura.



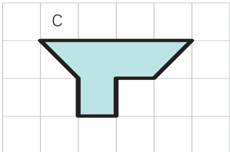
Respuesta: 5 cm

- Asocian los segmentos de igual longitud: 2 cm, 2 cm, 0,5 cm, 0,5 cm.
- Suman segmentos consecutivos: 2 cm + 0,5 cm + 2 cm + 0,5 cm.



Respuesta: 5 cm

- Asocian los segmentos de igual longitud: 1,5 cm +1 cm + 1 cm + 0,5 cm + 0,5 cm + 0,5 cm.
- Suman segmentos consecutivos: (1,5 cm + 0,5 cm + 1 cm + 0,5 cm + 0,5 cm + 1 cm).
- Hacen otro tipo de asociaciones (2 cm + 1 cm + 1 cm + 1 cm).



En la mayoría de los grupos, los alumnos discuten sobre la longitud de los segmentos que están sobre las diagonales del cuadrado (0,5 cm o más de 0,5 cm) y utilizan la regla diciendo que es un milímetro más (0,6 cm).

Respuestas: - 5 cm
- más de 5 cm

En la puesta en común, podremos propiciar la discusión respecto del perímetro de la figura C, ya que generalmente no les da a todos igual. Podremos acordar que el valor del perímetro tiene una diferencia más o menos de 1 mm. Algunas expresiones de los chicos suelen ser: *tiene la culpa la regla; no se ve bien porque la rayita del lápiz es casi la diferencia* o bien: *Mirá, si me corro un poquito para este lado, ya veo que mide más....* Esto permite aclarar que siempre que medimos hay un error que se relaciona con el instrumento o con nosotros.

Por otro lado, los alumnos suelen asombrarse de las diferencias que existen entre el perímetro del rectángulo y del cuadrado, y es habitual que lo calculen varias veces. La discusión respecto de la variación de la forma y del perímetro para figuras de igual área permite concluir que *las figuras dadas que tienen igual área, no tienen igual el perímetro.*

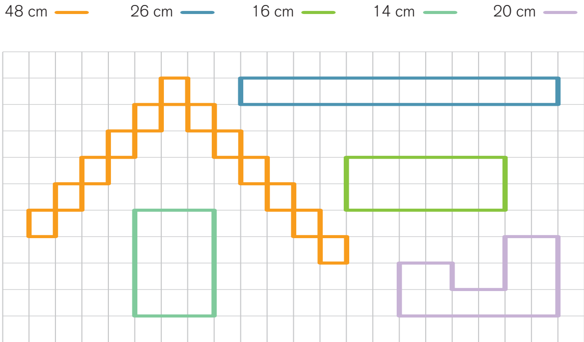
Para continuar trabajando con la relación entre perímetro y área, es posible proponer una secuencia como la que sigue, con actividades en las que, a diferencia de las anteriores, los alumnos producirán figuras con un área o perímetro indicado.

Secuencia para relacionar perímetros y áreas: “Dibujando figuras”

Actividad 1

Una primera propuesta consiste en que solicitar a los alumnos que dibujen figuras de igual área y distinto perímetro. Los alumnos trabajarán por parejas y a cada una se le dará una hoja de papel cuadriculado de malla 1 cm^2. Daremos una consigna como la siguiente: *En la hoja que les entregué tienen que dibujar figuras de 12* cm^2 *de área pero que tengan diferente perímetro. Acuerden con sus compañeros para que entre los producciones no se repita la forma de la figura.*

Las que siguen son algunas producciones de los alumnos al cumplir la consigna dada. Son figuras de área equivalente 12 cm^2, en las que se ha variado la forma y el perímetro.



Cuando los alumnos realizan estas producciones, en los intercambios con sus compañeros es posible escuchar reflexiones como: *Para lograr mayor perímetro los cuadraditos deben estar más sueltos, así se aumenta el contorno de la figura, o Hay que hacer figuras con muchas vueltas,* o *Para tener menor perímetro hay que ponerlos uno al lado del otro y uno arriba del otro,* o *En el rectángulo, que ponés los cuadraditos uno al lado del otro tiene mayor perímetro que el otro que ponés los cuadraditos uno al lado de otro y también arriba.*

En la discusión final, propondremos que compartan las estrategias que utilizaron los alumnos. Es posible que al observar el registro de las figuras en el pizarrón y los valores de los perímetros los chicos intenten lograr figuras con el mayor o menor perímetro posible, que traten de buscar figuras con medidas de perímetros que no aparecieron, por ejemplo: 15 cm, 18 cm, 49 cm, etc. y realicen algunas afirmaciones, tales como *El valor más grande del perímetro es de 48 cm* (apenas si se tocan por un punto), o *Siempre te da un número par el valor del perímetro.*

En las figuras que realizan los chicos, generalmente se observa que las medidas de sus lados son números enteros.

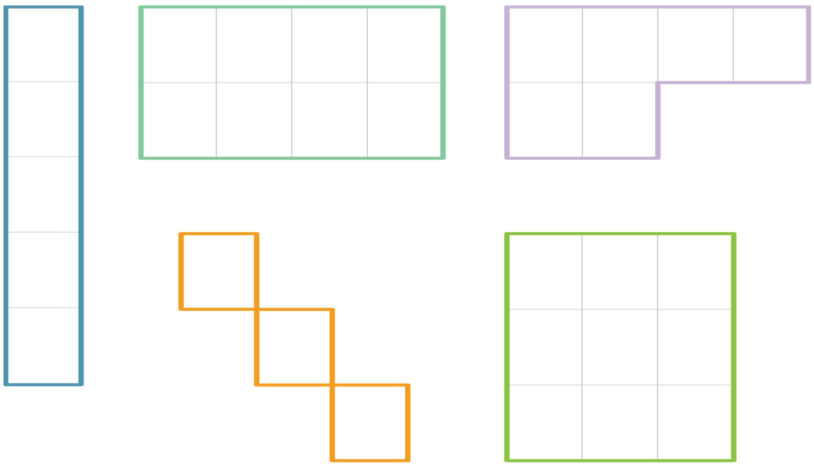
Actividad 2

En función de las formulaciones de los alumnos, podremos continuar con la segunda actividad pediremos la figura de menor y de mayor perímetro posible para un área de 16 cm^2. Cambiar el valor del área permitiría que aparezca el cuadrado como figura de menor perímetro sin recurrir, por ahora, a valores no exactos del lado del cuadrado.

Si trasladamos esta afirmación al trabajo realizado anteriormente con 12 cm^2, instalaríamos la discusión respecto de la relación entre el valor del área y el cálculo de la longitud del lado, relaciones que podrán seguir avanzando en años posteriores, como raíz cuadrada no exacta, etc.

Actividad 3

En esta actividad los alumnos continúan trabajando en parejas. Nuevamente, les daremos papel cuadriculado de malla 1 cm^2 y papel liso. La consigna de la actividad consiste en que dibujen figuras de 12 cm de perímetro variando el área. Propondremos que en cada grupo se pongan de acuerdo para que varíen las formas y el área. En los dibujos de los alumnos pueden aparecer figuras como las siguientes:



Para resolver esta actividad, es probable que aparezcan estrategias en las que los chicos utilicen sumas y propiedades de las figuras, por ejemplo, plantear que pueden hacer rectángulos de lados 5 cm y 1 cm (5 + 5 +1 + 1), ó 4 cm y 2 cm (4 + 4 + 2 + 2), o un cuadrado de lado 3 cm. También es probable que reutilizando lo realizado en las actividades anteriores, realicen *los cuadrados en diagonal* o *los cuadrados que se tocan por un vértice* de lados 1 cm (4 + 4 + 4). Es interesante comparar esta figura y el cuadrado, ya que sus áreas son 3 cm^2 y 9 cm^2 respectivamente.

Otros alumnos, sin realizar ninguna anticipación, van construyendo las figuras sobre la cuadrícula contando hasta llegar a 12 cm. Esta estrategia los conduce en varias oportunidades a no poder cerrar la figura y a preguntarse si esas formas tienen área, y se dan cuenta de que no pueden decir cuál es el área, porque la figura no es cerrada.

Algunos alumnos seguramente utilizarán el papel liso y la regla, lo que les permitirá realizar otras figuras con formas diferentes.

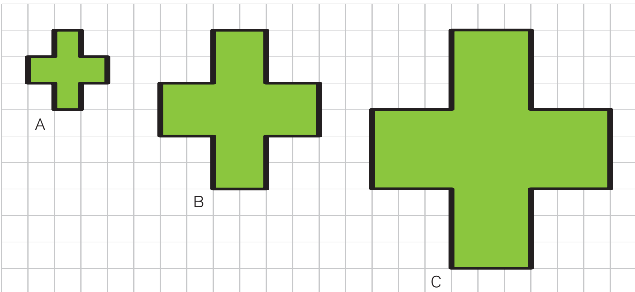
En la puesta en común, es conveniente ordenar según la variación de las áreas las figuras de 12 cm de perímetro, para orientar la reflexión de los alumnos hacia la relación que se establece cuando el perímetro permanece constante y las áreas toman valores diferentes. El análisis sobre sus conjeturas o la problematización de las mismas permitirá avanzar en los conceptos de perímetros y áreas.

En general, con actividades de estas características, los problemas de conservación de alguna de las dos magnitudes (longitud y superficie) se ponen en juego a través de trasformaciones que se observan al mantener invariante una de ellas.

Actividad 4

También es importante explorar la variación del perímetro de una figura cuando varían las dimensiones de sus lados.

• Un grupo de alumnos construyó figuras con la condición dada por la maestra. Hicieron lo siguiente.



a) ¿Cuál creés que fue la condición que les dio la maestra?
b) ¿Qué relación encontrás entre los lados de la figura A y los de la figura C?
c) ¿Es posible obtener los lados de la figura B conociendo los lados de la figura A? ¿cómo?
d) Si el perímetro de la figura A es 12 cm., ¿es posible con una sola operación obtener el perímetro de la figura C? ¿Cuál es esa operación?

• En otro grupo, los chicos tuvieron que construir una figura cualquiera con la misma consigna que en la actividad anterior. En este caso, la maestra les dio las medidas de los lados en una tabla. Completá los valores que faltan.

FIGURA	LADOS				
	AB	BC	CD	DE	EF
P	4	6	8		3
R	10	15		25	

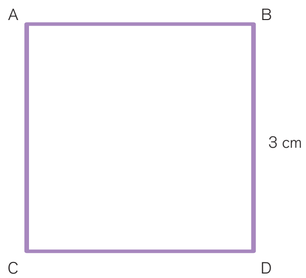
Reproducir una figura a escala diferente, es decir achicar o agrandar una figura, implica para los alumnos lograr que las relaciones de la figura dada se conserven en la reproducción. En el ejemplo se plantea la necesidad de descubrir la relación multiplicativa de proporcionalidad entre los datos de una y otra figura.

En el apartado “Plantear situaciones para operar con distintos significados y en distintos portadores” de este *Cuaderno* se analizan situaciones en las que la constante de proporcionalidad asume valores naturales como racionales.

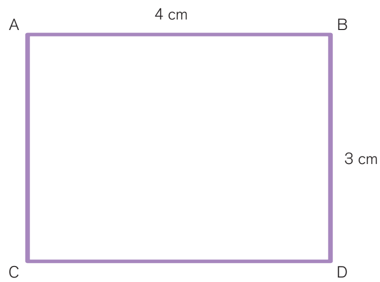
Otro tipo de actividades que podremos plantear para avanzar en el análisis de variaciones en contextos geométricos y que permiten, a la vez, reinvertir lo aprendido sobre propiedades de las figuras es, por ejemplo, la siguiente:

• Para cada figura analizá cómo aumenta el perímetro cuando la longitud de los segmentos que miden 3 cm se duplica, se triplica, se reduce a la mitad o a la cuarta parte.
a) ¿En algún caso podrías decir que la longitud del lado y el perímetro se relacionan de forma proporcional?

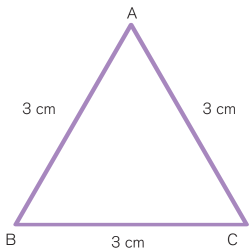
I.



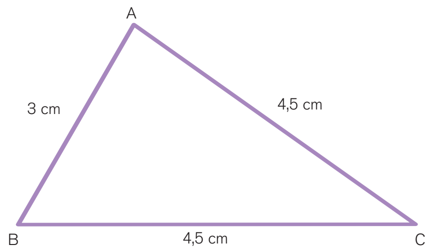
II.



III.



IV.



b) ¿Cambia la respuesta que diste en el ítem a) si en los casos II y IV todos los lados aumentan el doble, el triple, etc.?

Una vez más los alumnos podrán justificar sus respuestas utilizando dibujos, mediciones, cálculos y la elección dará cuenta de los conocimientos que tienen disponibles tanto en relación con las propiedades de las figuras y el cálculo del perímetro como con la proporcionalidad. La variación de las figuras y de las condiciones permitirá que los alumnos encuentren ejemplos tanto de variaciones proporcionales como de aumentos que no son proporcionales.

Plantear situaciones para analizar la escrituras de cantidades

Habitualmente, utilizamos el término *cantidad* para referirnos al valor que toma una magnitud en un objeto particular. Por ejemplo, el largo de una varilla, pero esa longitud también hace referencia a cualquier objeto que pueda superponerse exactamente con el largo de esa varilla.

Para comunicar cantidades sin necesidad de tener a la vista las unidades que se usaron para medir, se crea un sistema de unidades. Si bien cualquier sistema podría ser válido y cómodo para expresar las mediciones, hay razones que justifican el uso de un sistema regular común acordado universalmente. En la actualidad, el sistema métrico decimal de uso más extendido es aquel que realiza los cambios de diez en diez, en las magnitudes lineales, y según las potencias de diez en las otras magnitudes.

La utilización de cambios regulares es, precisamente, lo que asemeja el sistema de medidas al sistema de numeración y, en ambos casos, se hace necesaria la comprensión de los diferentes órdenes de unidades para entender y elaborar escrituras numéricas. La escritura de la medida tiene su equivalente en lo que refiere a la descomposición de un número en unidades, decenas y centenas, etc.

El dominio de las escrituras de cantidades a partir de un sistema regular de medidas es objeto de trabajo en 6º año/grado. El problema de las escrituras equivalentes es complejo, ya que en su comprensión se involucran otros conceptos, por ejemplo el valor de posición y la importancia del cero. A los problemas relativos a los números decimales se añaden los propios de la medida en lo referente a escrituras con diferentes unidades. Frecuentemente, los alumnos suelen cometer errores para pasar de la lectura a la escritura de cantidades cuando éstas tienen ceros.

La siguiente actividad, que presentaremos teniendo en cuenta las unidades ya conocidas por cada grupo, tiene como propósito favorecer en los alumnos el establecimiento de relaciones entre los distintos órdenes de magnitud. Es posible modificar las unidades según los conocimientos del grupo.

• Dadas las siguientes cantidades, agrupalas según sean mayores que un metro o menores que un metro.

0,1 km   900 cm   86000 mm   750 dm   1,6 hm   12 dam

Luego de un tiempo breve de trabajo individual, es posible realizar un plenario para discutir sobre las respuestas de los alumnos. En un grupo de 6º año/grado, los alumnos manifestaron, por ejemplo:

- *Todas las cantidades son mayores que un metro.*
- *Hay una menor (0,1 km) y el resto son mayores que un metro.*
- *Hay tres menores (señalando 900 cm, 86000 mm, 750 dm) y las demás son mayores*

Entre las justificaciones que dan los alumnos, es posible observar que algunos consideran la medida sin tener en cuenta la unidad, por ejemplo *0,1 km es menor que un metro porque 0,1 es menor que 1.* Otros tienen presente la unidad de medida, independientemente de la medida: *0,1 km es mayor que el metro porque tiene el km* y 900 cm, 86000 mm, 750 dm las agrupan como menores que el metro. Para el caso del 1,6 hm, en general aparece como mayor que el metro, ya sea porque consideraron la unidad de medida o la medida.

En el momento de la discusión, podremos intervenir con preguntas o problematizaremos las afirmaciones de los alumnos para favorecer la posibilidad de imaginar o concretar esas cantidades, de pensar en la relación que existe entre la medida y la unidad de medida y también de buscar información respecto de las equivalencias conocidas.

Seguramente, nos encontraremos con reflexiones como las siguientes: *Te engaña, ¿viste?, te parece que es más chica que el metro porque decís centímetro y no te fijás en el número.* O bien: *Hay que mirar bien los dos, porque puede ser un número grande con una unidad chiquita (la del mm) o un número chiquito con la unidad grande (1 km). Pero cuando las dos son grandes, seguro que es mayor que un metro (1,6 hm y 12 dam). O: Para estar seguro hay que pensar cuanto es de largo, con algo que conocés.*

Para seguir trabajando con estas relaciones, continuando con esta propuesta, es posible pedirles a los chicos que ordenen de mayor a menor las cantidades anteriores. En este caso, no es suficiente compararlas con un metro para encontrar la respuesta, deberán comparar las cantidades entre ellas.

Es posible que la mayoría de los alumnos expresen las cantidades en metros y luego las ordenen. En este caso, una intervención posible es: *si un chico expresa todas las cantidades en otra unidad, van a quedar ordenadas de igual manera* e incluso podremos pedirles que anticipen cómo será el tamaño de los números en función de la unidad elegida. *Si pasamos todos a hm o dm ¿en qué caso los números serán más grandes?*

Para analizar diversos procedimientos, si es que no surgieron espontáneamente en el grupo, es posible intervenir diciendo *Un chico leyó en letras: la décima parte de un kilómetro y escribió en números:* 0,1 km
$\frac{1}{10}$ de 1000 m = 100 *m. ¿Es correcto?*

O bien, Un chico dijo dijo que 1 hm es una cuadra, es decir 100 metros, entonces 1,6 hm son 160 metros. ¿Están de acuerdo?

A partir de esta actividad, es posible concluir *Para ordenar cantidades o compararlas es conveniente expresarlas siempre en una sola unidad de medida, no tiene porque ser siempre el metro, pueden ser otras.*

Para avanzar en las relaciones que explicitaron los alumnos en relación a *cuánto más chica es la unidad de medida, mayor es la medida y viceversa,* podremos plantear situaciones donde se pongan en juego las equivalencias entre cantidades y se expliciten las relaciones entre medidas y unidades de medidas, como en la siguiente.

• Teniendo en cuenta lo discutido sobre unidades y medidas respondé a las preguntas.
a) ¿Será verdad que si elegimos unidades mayores el valor de la medida será menor? ¿por qué?
b.) ¿En qué unidad expresarías 86 m; sin variar la cantidad, para que la medida sea mayor que la dada?
c) La siguiente cantidad: 25 cm se quiere expresar en una unidad de medida 100 veces mayor. ¿Cuál es la unidad? ¿Cuántas veces más pequeña es la medida?
d) ¿En que unidad expresarías la cantidad 86.000 mm para que la medida (el número) sea más pequeño y no varié la longitud?

En estas actividades, observaremos que los alumnos suelen poner en juego algunas relaciones y conocimientos que han aprendido anteriormente, por ejemplo:
- Las relaciones entre múltiplos y submúltiplos en relación específica con el metro: 1 m = 100 cm, 1 m = $\frac{1}{10}$ dam.
- La relación 1 cuadra igual a 100 metros a partir de la experiencia cotidiana. Asocian como si fueran sinónimos la cuadra y el hectómetro o la regla del aula tiene 100 centímetros
- Las correspondencias entre la numeración hablada y las escrituras fraccionarias y decimales de los números y las relaciones $\frac{1}{2}$ ó 0,5 metro equivale a 50 centímetros; 1 cuadra es un hectómetro, 100 metros; $\frac{1}{2}$ cuadra equivale a 50 metros; $\frac{1}{4}$ de cuadra son 25 metros; dos cuadras y media son 250 metros (2,5 hm = 250 m)

Otras actividades que podemos proponer para avanzar en la explicitación de la estructura del sistema métrico son las siguientes:

• Dado el segmento A ├────────┤ y sabiendo que este segmento tiene el doble de longitud que el segmento U, construí y ordená en forma creciente las longitudes de los segmentos A, B, C, D, E, F, G.

B = 2 A	C = 2,5 A	D = 4U
E = 1/2 A + 1U	F = 2A + 1U	G = 5 U

Para realizar la actividad, los alumnos tendrán que interpretar las relaciones de las escrituras que se presentan, para luego poder construir los segmentos. Al ordenarlos, y con la ayuda que les proporciona el dibujo, los chicos podrán determinar tres grupos de segmentos de igual longitud y establecer relaciones como las siguientes.

A = E
C = F

B = D
F = G

E menor que B
D menor que C

En plenario, es importante que dirijamos la reflexión sobre:

- Las relaciones entre las unidades de medida y los valores de las medidas.
- Al utilizar las unidades A o U los números de las medidas varían en relación inversa porque si A es el doble que U, U es la mitad de 1.
- Las diferentes escrituras de la medida 1 U = $\frac{1}{2}$ A = 0,5 A, utilizando números enteros o no (expresión fraccionaria o decimal) en función de la unidad de medida elegida.
- Los significados de las escrituras unificadas, por ejemplo, 5 U (respecto de una unidad) en relación con las escrituras complejas 2 A + $\frac{1}{2}$ U y sus equivalencias 2 A + $\frac{1}{2}$ U = 5 U = 2,5 A.
- Las lecturas de las escrituras equivalentes y la significación que ésta puede aportar para imaginar una cantidad. Por ejemplo, pensar que C es dos veces y media el segmento A es más simple que pensar que C es dos veces el segmento A más una vez el segmento U.

Otras actividades que favorecerían la construcción de estas relaciones podrían ser las siguientes.

• En las escritura de los valores de la longitud de cada uno de estos segmentos se utilizaron unidades diferentes de U y M. Indicá en cada caso qué relación encontrás entre U y M.

A = 2 U = 8 M
B = 6 U = 3 M
C = 10 U = 100 M
D = 1 U = 1000 M

• Dadas las siguientes equivalencias, ¿cuántas veces mayor o menor son U, M, y P que la unidad A? Justificá tu respuesta.

a) 2 A = 6 U
b) 10 A = 1 M
c) 5 A = 50 P

Como ya lo mencionamos, en todos estos casos es importante la reflexión permanente sobre las equivalencias de cantidades de diferentes magnitudes, utilizando unidades no convencionales y convencionales con las relaciones de décimas, centésimas, etc.

De forma similar, podemos proponer actividades como la anterior para poner en juego las relaciones que se establecen en el Sistema Legal de medidas. Por ejemplo:

> • Completá para que las expresiones resulten equivalentes.
> 10 cm = … m   10 cm = … 0,1…
> 10 … = 0,1 m   … cm = 0,1…

Si bien los ejemplos anteriores se han desarrollado teniendo en cuenta la longitud, que es la magnitud que con mayor frecuencia aborda el tratamiento escolar y permite comprobaciones empíricas muy accesibles, el mismo tipo de trabajo puede plantearse para situaciones que se refieran a capacidades o pesos. Cabe advertir que para los alumnos no es directa la generalización: si 1 kilómetro equivale a 1000 metros, kilolitro equivale a mil litros y kilogramo a mil gramos, o que si para expresar una misma cantidad la unidad se reduce a la décima parte la medida resulta 10 veces mayor, tanto para longitudes como para capacidades y pesos. En este sentido, no basta con trabajar en profundidad la longitud para pasar luego a sistematizar las relaciones entre unidades para otras magnitudes sin desarrollar antes actividades específicas al respecto.

Para trabajar con la información

Tal como hemos planteado, el trabajo sobre el tratamiento de la información es transversal a los ejes de contenidos. En el caso de los problemas espaciales, geométricos y de medida, este trabajo también concierne a la consideración de aspectos que pueden ser retomados en algunas de las actividades planteadas.

Es el caso de la actividad con el plano de la sala de video de una escuela, presentada en el aparado “Plantear situaciones para producir e interpretar representaciones a escala”, donde se presenta información en un dibujo y en un texto. Aquí, la información del dibujo permite determinar la ubicación de las ventanas. Si no se diera el dibujo, no se conocería el lugar en el que colocar las mesas en relación con la ventana.

Otro caso es el de la consideración del número de respuestas, por ejemplo en “Plantear situaciones para analizar la escritura de cantidades”, al completar … cm = 0,1 … Se podría discutir con los alumnos si este problema tiene una única respuesta y promover una búsqueda exhaustiva de todos los completamientos posibles.

Si bien aquí hemos mostrado sólo dos ejemplos, combinar los modos de presentar la información y analizar cuando sea pertinente el número de soluciones son aspectos que permitirán al docente enriquecer el trabajo con problemas.

mate6.qxd 23/07/07 17:52 Page 186

En diálogo siempre abierto

Las propuestas y la realidad del aula

Para ampliar el repertorio y recrear las actividades

Al desarrollar el enfoque para trabajar en la clase de Matemática, hemos insistido en las elecciones que debemos realizar respecto de los tipos de problemas, sus modos de presentación y su secuenciación. También hemos señalado que la gestión de la clase será determinante respecto del sentido que los alumnos construyen sobre las nociones matemáticas, tanto por las interacciones que el docente promueva entre los alumnos y con las situaciones como por sus propias intervenciones a lo largo del proceso de enseñanza.

Por otra parte, hemos planteado que es necesario incorporar, más allá de la resolución de problemas, otras actividades, pues este no debiera ser el único tipo de práctica matemática que funcione en el aula, ya que es fundamental que las clases incluyan instancias de reflexión sobre lo que se ha realizado. En estas instancias, podrán plantearse, por ejemplo, actividades de comparación de problemas realizados con alguna operación, o de comparación de diferentes estrategias para resolver un cálculo, algunas acertadas y otras no. También se podrá poner en consideración de los alumnos la recuperación de las propiedades de cada una de las figuras que han estudiado, a modo de síntesis.

Para comparar problemas, es posible revisar lo trabajado en el cuaderno durante una semana y señalar todos los problemas que se resolvieron con una determinada operación para comparar los enunciados, encontrar semejanzas y diferencias[1] y pensar nuevos enunciados que podrían resolverse con la misma operación.

En el caso de querer comparar estrategias de cálculo, se puede recuperar, por ejemplo, el repertorio de sumas de fracciones que ya hayan memorizado todos los alumnos y registrarlo a modo de síntesis en un afiche que se cuelgue en el aula para luego utilizar esos resultados como ayuda para resolver otros cálculos.

[1] Un ejemplo de este tipo de actividad se presenta en este *Cuaderno*, en el apartado "Plantear situaciones para operar con cantidades expresadas en fracciones o decimales con distintos significados", en el que se presenta un fragmento de registro de clase.

Entre ellos, se podrá señalar cuáles son los que ya conocen de memoria y cada chico podría ir armando una tarjeta con todos los cálculos que él sabe o las propiedades que conoce y, de este modo, tomar conciencia de su progreso.

Asimismo, en este apartado queremos avanzar sobre actividades que forman parte de la tradición escolar: las tareas para el hogar, y precisar algunas cuestiones relacionadas con el Segundo Ciclo. Estas tareas, pensadas para que el alumno las desarrolle fuera de la escuela, renuevan su sentido en relación con los aprendizajes prioritarios y con el tiempo necesario de apropiación individual de los conocimientos trabajados en clase.

La realidad compleja con la que hoy interactúa la escuela presenta aspectos que pueden hacer difícil llevar adelante el estudio. Sin embargo, aun en este escenario, es posible plantear alguna actividad desafiante para resolver fuera del aula. En este sentido, es imprescindible asegurarnos de que todos hayan comprendido cuál es el desafío que se propone, para evitar la creación de un obstáculo excesivo para los niños, o para los adultos que los acompañan cuando realizan sus tareas, que podrían intervenir en una dirección distinta de la que pretendemos.

Deberemos ser muy claros para distinguir si la tarea debe hacerse con o sin ayuda y, en este último caso, precisar cuál es la ayuda que se espera. En el caso de los alumnos del Segundo Ciclo, a diferencia de los de Primer Ciclo, es posible pensar en una mayor independencia de los adultos en la realización de estas tareas. Esto requiere que los mayores comprendan la importancia de este planteo y, al mismo tiempo, exige que las características de las actividades sean lo suficientemente similares y, a su vez, diferentes respecto de las discutidas en clase, de tal manera que todos los alumnos comprendan lo que se espera de ellos como producción; que tengan asegurado un lugar de importancia en el proyecto de aprendizaje del docente y que se garanticen con ellas verdaderas situaciones de aprendizaje para los alumnos.

Las actividades que se pueden plantear para realizar fuera de la clase también podrán ser de distinto tipo. Por ejemplo, se podría seleccionar un conjunto de cuentas ya resueltas y pedir la comparación de los números que intervienen en los cálculos y los resultados para analizar semejanzas y diferencias y advertir regularidades. O también, proponer partidas simuladas sobre un juego que se realizó en clase en donde intervengan los números y cálculos con los que se estuvo trabajando y que den lugar a la práctica del cálculo mental.

En cualquier caso, recuperar lo producido fuera de la escuela supone mucho más que “corregir” la tarea: se trata, en cambio, de organizar una nueva actividad diseñada de modo que tome como punto de partida lo realizado fuera de clase. Así, también es una excelente oportunidad para una interacción más personalizada con los alumnos y sus dificultades. Nos estamos refiriendo a plantear una tarea focalizada en aquellos aspectos que necesite profundizar cada niño o cada grupo. Todo esto permite que el alumno perciba que se valora su producción individual, al mismo tiempo que él mismo valore el tiempo que dedica para su estudio individual como una instancia más de su proceso de aprendizaje.

Para construir espacios de debate

Todas las actividades propuestas en este *Cuaderno* están sostenidas y fundamentadas en una concepción del aprendizaje que implica una idea de lo que pensamos que debiera significar "hacer matemática" para los alumnos. Sin embargo, para transmitir y sistematizar esta idea del quehacer matemático a los niños y niñas no es suficiente proponerles actividades "interesantes" que propicien en los alumnos aprendizajes diferentes y que los desafíen a buscar estrategias propias de resolución. Esperamos también que los alumnos desarrollen recursos de control sobre sus procedimientos y los ajenos, puedan fundamentar sus estrategias y argumentar en favor de ellas, descentrarse de sus producciones e introducirse en las de sus compañeros, siendo capaces de apoyarlas o criticarlas con fundamentos matemáticos.

Hay momentos de la clase que son especialmente propicios para lograr este tipo de aprendizaje. Por eso afirmamos que además de la buena selección de actividades es fundamental tener en cuenta la organización y gestión de la clase que el docente es capaz de llevar a cabo para alcanzar estos objetivos. Los espacios de debate, como la confrontación de procedimientos, ponen a los alumnos en la situación de tener que dar cuenta de las estrategias utilizadas y de entender estrategias ajenas. Cuando los niños tienen que explicar a sus compañeros algo que no entienden, o hacerles entender por qué dicen que "está mal" o "está bien" tal o cual cosa, es cuando se les genera la necesidad de pensar la forma más clara de comunicar sus argumentos y fundamentos. Este es un plus frente a la actividad de resolver un problema, porque implica un trabajo de comprensión y dominio de la situación mucho mayor que solo resolverlo. El hecho de justificar "qué se hizo", "cómo se hizo" "por qué se hizo" "si está mal o bien" implica de hecho una reflexión sobre la tarea realizada y una nueva mirada sobre el problema, pero desde la posición de alguien que ya lo ha "desmenuzado", porque ya lo ha resuelto. Es decir, lo que les pedimos a los alumnos en estos momentos de debate involucra un aprendizaje diferente (y más complejo) del que implica la resolución de la actividad planteada. De aquí que la falta de gestión de estos espacios de debate limite los aprendizajes matemáticos en los alumnos. Desde la perspectiva de esta concepción del aprendizaje, no es lo mismo realizar una confrontación que no hacerlo, pues estos espacios son el corazón mismo de la diferencia en los aprendizajes que esperamos propiciar en los alumnos desde esta propuesta.

La organización y gestión de estos espacios de debate entre los alumnos implica también un aprendizaje por nuestra parte, ya que debemos aprender cómo intervenir, de manera de propiciar este tipo de aprendizajes en los alumnos. Cuando los alumnos comienzan a producir solos y aparecen diferentes procedimientos, de diferentes niveles de complejidad, con diferentes tipos de errores, se presenta la dificultad para nosotros, por un lado, para decidir qué discutir y, por el otro, para saber cómo hacer para que los alumnos hablen y se pongan a discutir acerca de sus producciones. Decidir cuáles podrían ser buenas preguntas y cuáles desorientan más aun al alumno en este nuevo tipo de trabajo en el que estamos embarcándolo es un desafío permanente. Es muy útil y conveniente en un primer momento no realizar preguntas abiertas como *A ver, Juan, ¿qué te parece este procedimiento?,* ya que la amplitud de la pregunta hace que un alumno que se está iniciando en este tipo de trabajo no pueda imaginarse cuál podría ser una respuesta razonable en este caso. En cambio, preguntas como *A ver, Juan, fijate en lo que hizo Martín en esta cuenta, ¿qué son estos números?, ¿manzanas?, ¿cajones?, ¿qué tiene que ver esta cuenta con el enunciado del problema? ¿Para qué creés que la hizo?,* son más concretas y más fáciles para imaginarse una posible respuesta.

También es conveniente que estemos atentos especialmente a que estos debates no se transformen en una corrección de los procedimientos utilizados, en los que nuestra intervención esté asociada al control de lo realizado. Si es el docente el que finalmente tiene la palabra y queda depositado solo en él dar o no por válido lo que se hizo, los alumnos no sienten la necesidad de emitir su opinión más que para rendir examen frente al maestro y frecuentemente no se muestran interesados en responder a las preguntas que este formula en ese momento de trabajo colectivo. En ese caso, la matemática sería vivida como una serie de reglas y definiciones predeterminadas que hay que reconocer y aplicar.

Si, en cambio, nuestra intervención en el debate intenta recuperar lo que los alumnos están haciendo y promovemos la discusión alrededor de esas producciones, habrá un verdadero espacio de discusión, una situación genuina de comunicación en la que intercambiarán distintos puntos de vista, para llegar a una conclusión aceptada por el conjunto de la clase. En este caso, el trabajo se valida por la comunidad clase, y el maestro interviene conduciendo el debate entre los chicos o introduciendo preguntas nuevas y sistematizando las conclusiones a las que se arribe; en principio, estas conclusiones podrán ser registradas tal como las formulen los alumnos aunque su expresión no se ajuste completamente a las expectativas del docente. En una etapa posterior se podrán revisar estas enunciaciones y, por ejemplo, compararlas con lo que se dice al respecto en un libro de texto, para avanzar en el uso del vocabulario específico y/o discutir cuestiones ligadas al uso de distintas anotaciones. Asimismo se podrá volver sobre estos enunciados para analizar su “campo de validez” y modificarlos, si fuera necesario, para avanzar en el nivel de generalidad de lo que se afirma, ya que algunas afirmaciones son verdaderas en un campo numérico, o para un conjunto de figuras, y no lo son para otro.

Si esta práctica forma parte de lo que queremos enseñar, es imprescindible considerar que necesita construirse a lo largo de toda la escolaridad, teniendo en cuenta las características propias de los niños en cada etapa.

Las propuestas incluidas en este *Cuaderno* forman, sin duda, una pequeña colección de casos con algunas sugerencias para su implementación y gestión. Su uso en el aula dependerá de las decisiones que, al respecto, se tomen en cada institución, atendiendo tanto a los proyectos institucionales como a las particularidades de cada grupo de alumnos y de la comunidad.

En muchas ocasiones, la lectura y discusión de estos casos derivará, seguramente, no en la “aplicación” de los ejemplos analizados, sino en nuevas propuestas adaptadas tanto a los conocimientos del grupo de alumnos como a la forma de trabajo del docente que las desarrolle.

En este sentido, resultará muy interesante el debate que se genere en el equipo de la escuela a propósito de su uso, los intercambios de lo ocurrido en las puestas en aula con los colegas y la sistematización de las nuevas propuestas que se puedan formular.

Del mismo modo, la consulta de los materiales recomendados en la sección “Bibliografía” de este *Cuaderno* permitirá ampliar la perspectiva presentada, multiplicar la variedad de propuestas y abrir nuevas preguntas sobre la enseñanza de la Matemática.

Bibliografía

Bibliografía recomendada para docentes

BRESSAN, A. M. y BOGISIC, B. (1996), "La estimación una forma importante de pensar en matemática". Desarrollo Curricular, Consejo Provincial de Educación de Río Negro. (También disponible en Internet.)

BROITMAN, C. (COORD.), ESCOBAR, M. y SALGADO, M. (2007), *División en 5° y 6° años de la escuela primaria. Una propuesta para el estudio de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto.* Documento de apoyo para la capacitación, DGCyE / Subsecretaría de Educación. (También disponible en internet.).

CHARNAY, R. (1994), *"Enseñar matemática a través de la resolución de problemas" en* PARRA, C. y SAIZ, I. (comps.) (1994), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós.

CHEMELLO, G. (COORD.), HANFLING, M. y MACHIUNAS, V. (2001), *Juegos en Matemática EGB 2, El juego como recurso para aprender. (Material para docentes y recortable para alumnos),* Buenos Aires, Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (También en Internet.)

FUENLABRADA, I., BLOCK, D., BALBUENA H., CARVAJAL, A. (2000), *Juega y aprende Matemática. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

GARCÍA, A. M., ZORZOLI, G. (1998), *Revista Lápiz y papel. Matemática, La medida,* Buenos Aires, Tiempos Editoriales.

PANIZZA, M. (1997), *"Aproximación al análisis del error desde una concepción constructivista del aprendizaje", en:* BRESSAN, A. y OTROS (1997), *Los CBC y la Matemática,* Buenos Aires, AZ.

PANIZZA, M. (2003), *"Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la Matemática", en: Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* Buenos Aires, Paidós.

PANIZZA, M. y SADOVSKY, P. (1991), *El papel del problema en la construcción de los conocimientos matemáticos,* Buenos Aires, FLACSO.

PONCE, H. (2000), *"Proporcionalidad: del dogma a la construcción de los procedimientos" y "Proporcionalidad: entre los procedimientos y la búsqueda de regularidades" y "Nociones de estadística" en: Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el Segundo Ciclo,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

PUJADAS, M. y EGUILUZ, M. L. (2000), *Fracciones, ¿un quebradero de cabeza? Sugerencias para el aula,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

SADOVSKY, P (COORD.) LAMELA, C., CARRASCO, D. (2005), *Matemática. Fracciones y Números decimales. 6° grado. Apuntes para la enseñanza.* Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de currícula.

SADOVSKY, P. (COORD.), BROITMAN, C.; ITZCOVICH, H., QUARANTA, M. E. (2001), *"Acerca de los números decimales. Una secuencia posible", en el documento Aportes para el Desarrollo Curricular Matemática,* GCBA (también disponible en Internet).

Documentos curriculares para Nivel Primario – EGB 2, en Internet

La enseñanza de la división en los tres ciclos.
La enseñanza de la geometría en la EGB.
La enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos.
En: http://abc.gov.ar/LaInstitucion/SistemaEducativo/EGB/default.cfm

Matemática. Documento de trabajo N° 4. Actualización curricular, 1997.
Matemática. Documento de trabajo N° 5. Actualización curricular, 1998.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/educacion/docentes/planeamiento/primaria.php

Matemática, fracciones y números decimales. 6° grado. Apuntes para la enseñanza.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/plan_pluri.php

Enseñar Geometría en el 1° y 2° Ciclo. Diálogos de la capacitación.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/cepa/geometria.pdf

Acerca de los números decimales. Una secuencia posible.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/primaria.php

Desarrollo curricular N° 1.
Una forma de uso de la proporcionalidad: las escalas. Desarrollo curricular N° 2.
Las regularidades: fuente de aprendizaje matemático. Desarrollo curricular N° 3.
La medida, un cambio de enfoque. Desarrollo curricular N° 4.
La división por dos cifras: un mito escolar Desarrollo curricular N° 5.
La estimación, una forma importante de pensar en Matemática.
En: http://www2.educacion.rionegro.gov.ar/v2005/gcurri/matematica/matemat.htm

Propuestas para el aula. Material para docentes. Matemática EGB 2.
Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender (material para alumnos). Subsecretaría de Educación Básica, Ministerio de Educación.
Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender (material para docentes). Subsecretaría de Educación Básica, Ministerio de Educación.
En http://www.me.gov.ar/curriform/matematica.html

Bibliografía general de consulta

A.A.V.V. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Uno N° 10* (1996) *La medida,* Barcelona, Editorial Graó.

ARTIGUE, M., DOUADY, R. y OTROS (1995), *Ingeniería didáctica en educación matemática,* Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericano.

BERTHELOT, S. (1993), *"La enseñanza de la Geometría en la escuela primaria" Artículo de la Revista Grand N° 53, traducido para el PTFD,* Ministerio de educación.

BIDEAU, J.; MELJAC, M. y FISHER J. P. (1991), *L'appropriation du concept de nombre: un processus de lounge halaine (La apropiación del concepto de número: un proceso de largo aliento) Les chemins du nombre, Lille Presses Universitaires de Lille.*

BRESSAN, A. M., BOGISIC, B. y CREGO, K. (2000), *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica.* Buenos Aires. Novedades Educativas.

BROUSSEAU, G. (1987), *Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemática,* Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.

BROUSSEAU, G. (1994), *Problemas en la Enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales.* Publicación de IMAF, Universidad Nacional de Córdoba. Traducción realizada por Dilma Fregona y Rafael Soto con autorización del autor Brousseau, Guy (1981) de "Problemes en didactique des décimaux" en Recherches en didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage, vol. 2, núm. 1, Francia, 1981.

CAMUYRANO M. B., CRIPPA, A. y otros (1998), *Matemática. Temas de su Didáctica* PRO CIENCIA Conicet. Programa de perfeccionamiento docente. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

CENTENO PÉREZ, J. (1988), *Números decimales ¿por qué? ¿para qué? N° 5* Madrid, Síntesis.

CHAMORRO, M. del C. (2003), *Didáctica de las Matemáticas*, Madrid, Pearson Prentice Hall.

CHAMORRO, M. del C.; BELMONTE, J. M. (1994), *El problema de la medida*, Madrid, Síntesis.

CHEVALLARD, I. (1997), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado,* Buenos Aires, Aique.

CHEVALLARD, I., GASCÓN, J. y BOSCH, M. (1997), *Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje,* Barcelona, Ice-Horsori.

CORBALÁN, F. (1995), *La matemática aplicada a la vida cotidiana*, Barcelona, Graò.

FIOL MORA, M. L., FORTUNY AYMEMI, J. (1990). *Proporcionalidad Directa La forma y el número. N° 20,* Madrid, Síntesis.

IFRAH, G. (1987), *Las cifras. Historia de una gran invención,* Madrid, Alianza.

ITZCOVICH, H. (2005), *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría,* Buenos Aires, Libros del Zorzal.

OLMO ROMERO Y OTROS (1993), *Superficie y Volumen N° 19,* Madrid, Síntesis.

PANIZZA, M. (COMP.) (2003), *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* Buenos Aires, Paidós.

PARRA, C. Y SAIZ, I. (COMPS.) (1994), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós.

SEGOVIA ALEX, I.; CASTRO MARTINEZ, E.; RICO ROMERO, L. (1989), *Estimación en cálculo y medida. N° 9,* Madrid, Síntesis.

SIERRA VÁZQUEZ, M. y otros. (1991), *Divisibilidad N° 7,* Madrid, Síntesis.

VERGNAUD, G. (1991), *El niño, la matemática y la realidad,* México, Trilla.

-------- (1997) (COMP.), *Aprendizajes y didácticas: qué hay de nuevo,* Buenos Aires, Edicial.

-------- (1990). *La théorie des champs conceptueles (La Teoría de los Campos conceptuales) en Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 10.* (También es posible encontrar la Traducción de Juan D. Godino en Internet.)