nap

NÚCLEOS
DE APRENDIZAJES
PRIORITARIOS

4

SERIE
CUADERNOS
PARA EL AULA

Matemática

SEGUNDO
CICLO EGB /
NIVEL PRIMARIO

MINISTERIO de
EDUCACIÓN
CIENCIA y TECNOLOGÍA
PRESIDENCIA de la NACIÓN

Matemática

SEGUNDO
CICLO EGB /
NIVEL PRIMARIO

nap

NÚCLEOS
DE APRENDIZAJES
PRIORITARIOS

4

SERIE
CUADERNOS
PARA EL AULA

MINISTERIO de EDUCACIÓN
CIENCIA y TECNOLOGÍA
PRESIDENCIA de la NACIÓN

cfe Consejo Federal de Educación

Cuadernos para el aula, matemática 4 - 1a ed. - Buenos Aires :
Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, 2007.
184 p. ; 22x17 cm. (Cuadernos para el aula)

ISBN 978-950-00-0571-5

1. Matemática-Educación Primaria. 2. Libro del Docente.
CDD 372.7

La presente publicación se ajusta a la cartografía oficial, establecida
por el Poder Ejecutivo Nacional, a través del IGM –Ley 22.963–,
y fue aprobada por el expediente GG07 0021/5 en el mes de enero de 2007

Subsecretaría de Equidad y Calidad Educativa

Área de producción pedagógica *Cuadernos para el aula*
Coordinación y supervisión pedagógica general
Adela Coria

Equipo del Área de Matemática, de la Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente
Coordinación y supervisión pedagógica
Mónica Agrasar
Silvia Chara
Graciela Chemello

Autores
Susana Anzorena
Beatriz Bricas
Alicia Iturbe
María Teresa Zinelli (colaboradora)

Lectura crítica
Alejandra Lapegna

Área de producción editorial
Coordinación de Publicaciones
Raquel Franco

Brenda Rubinstein, *Asistencia de coordinación*
Silvana Franzetti, *Edición*
Félix De las Mercedes, *Corrección*
Carolina Mikalef, Alejandro Luna, *Dirección de arte*
Araceli Gallego, *Coordinación gráfica*
Alberto Caut, *Diagramación*
Mariana Pereyra, Martín Laksman, *Ilustración*
Miguel Forchi, *Cartografía*
Alejandro Peral, *Fotografía*
Rafael Blanco, *Documentación*

Presentación

En las décadas pasadas, diversos procesos económicos, sociales y políticos que tuvieron lugar en nuestro país pusieron en crisis el sentido de nuestra democracia. Aún la sociedad argentina es profundamente desigual a lo largo y a lo ancho de nuestro territorio. Estamos realizando importantes esfuerzos en materia de políticas públicas que revelan indicios alentadores en el proceso de contribuir a revertir esas desigualdades. Pero ello no ha sido hasta ahora suficiente. Niñas, niños y jóvenes son parte de una realidad donde la pobreza y la exclusión social expresan todavía de manera desgarradora la enorme deuda que tenemos con ellos y con su futuro.

Las brechas sociales se manifiestan también en la fragmentación de nuestro sistema educativo, en la desigualdad de trayectorias y aprendizajes, y en las dificultades que enfrentan los docentes al momento de enseñar.

En las circunstancias más difíciles, las escuelas se sostuvieron como uno de los lugares en los que se continuó albergando un sentido de lo público, resguardando las condiciones para que hayamos podido volver a pensar en la posibilidad de un todos. Maestros y maestras redoblan sus esfuerzos, persisten en la búsqueda de alternativas, y todos los días ponen en juego su saber en la construcción de nuevas prácticas.

Al reasumir desde el Estado la responsabilidad de acompañar el trabajo cotidiano de los docentes, buscamos recrear los canales de diálogo y de aprendizaje, afianzar los espacios públicos y garantizar las condiciones para pensar colectivamente nuestra realidad y, de este modo, contribuir a transformarla.

Creemos que es preciso volver a pensar nuestra escuela, rescatar la importancia de la tarea docente en la distribución social del conocimiento y en la recreación de nuestra cultura, y renovar nuestros modos de construir la igualdad, restituyendo el lugar de lo común y de lo compartido, y albergando a su vez la diversidad de historias, recorridos y experiencias que nos constituyen.

Transitamos una época de incertidumbre, de cuestionamientos y frustraciones. No nos alcanza con lo que tenemos ni con lo que sabemos. Pero tenemos y sabemos muchas cosas, y estamos vislumbrando con mayor nitidez un horizonte alentador.

Como educadores, nos toca la inquietante tarea de recibir a los nuevos alumnos y de poner a disposición de todos y de cada uno de ellos nuestras mejores herramientas de indagación, de pensamiento y de creación. En el encuentro que se produce entre estudiantes y docentes reside la posibilidad de la transmisión, con todo lo que ello trae de renovación, de nuevos interrogantes, de replanteos y de oportunidades para cambiar el mundo en el que vivimos.

Lo prioritario hoy es recuperar y consolidar la enseñanza como oportunidad de construir otro futuro.

Frente a ese desafío y el de construir una sociedad más justa, las escuelas tienen encomendada una labor fundamental: transmitir a las nuevas generaciones los saberes y experiencias que constituyen nuestro patrimonio cultural. Educar es un modo de invitar a los niños y a los jóvenes a protagonizar la historia y a imaginar mundos cada vez mejores.

La escuela puede contribuir a unir lo que está roto, a vincular los fragmentos, a tender puentes entre el pasado y el futuro. Estas son tareas que involucran de lleno a los docentes en tanto trabajadores de la cultura. La escuela también es un espacio para la participación y la integración; un ámbito privilegiado para la ampliación de las posibilidades de desarrollo social y cultural del conjunto de la ciudadanía.

Cada día, una multitud de chicos y chicas ocupa nuestras aulas. Cada día, las familias argentinas nos entregan a sus hijos, porque apuestan a lo que podemos darles, porque confían en ellos y en nosotros. Y la escuela les abre sus puertas. Y de este modo no solo alberga a chicos y chicas, con sus búsquedas, necesidades y preguntas, sino también a las familias que, de formas heterogéneas, diversas, muchas veces incompletas, y también atravesadas por dolores y renovadas esperanzas, vuelven una y otra vez a depositar en la escuela sus anhelos y expectativas. Nuestros son el desafío y la responsabilidad de recibir a los nuevos, ofreciéndoles lo que tenemos y, al mismo tiempo, confiando en que ellos emprenderán la construcción de algo distinto, algo que nosotros quizás no imaginamos todavía.

En la medida en que nuestras aulas sean espacios donde podamos someter a revisión y crítica la sociedad que nos rodea, y garantizar el derecho de todos los niños, niñas, jóvenes y adultos de acceder a los saberes que, según creemos, resultan imprescindibles para participar en ella, podremos hacer de la educación una estrategia para transformarla.

La sanción de la Ley de Educación Nacional inscribe en el plano legal ese sentido de apuesta por un futuro más justo, y plasma en sus principios y decisiones fundamentales, un fuerte compromiso de los Estados nacional y provinciales por construir ese horizonte de igualdad al que aspiramos como ciudadanos. La definición de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios forma parte así de una política educativa que, en la firme perspectiva de un mediano plazo, busca garantizar una base común de saberes para todos los chicos del país. Detrás de esta decisión, existe una selección deliberada de conocimientos fundada en apreciaciones acerca de cuáles son las herramientas conceptuales que mejor condensan aquello que consideramos valioso transmitir en la escuela. También, una intención de colocar la enseñanza en el centro de la deliberación pública sobre el futuro que deseamos y el proyecto social de país que buscamos.

Es nuestro objetivo hacer de este conjunto de saberes y del trabajo en torno a ellos una oportunidad para construir espacios de diálogo entre los diversos actores preocupados por la educación, espacios que abran la posibilidad de desarrollar un lenguaje y un pensamiento colectivos; que incorporen la experiencia y los deseos de nuestros maestros y maestras, y que enfrenten el desafío de restituir al debate pedagógico su carácter público y político.

Lic. Alejandra Birgin
Subsecretaria de Equidad
y Calidad Educativa

Lic. Daniel Filmus
Ministro de Educación,
Ciencia y Tecnología

Para dialogar con los Cuadernos para el aula

La serie *Cuadernos para el aula* tiene como propósito central aportar al diálogo sobre los procesos pedagógicos que maestros y maestras sostienen cotidianamente en las escuelas del país, en el trabajo colectivo de construcción de un suelo compartido y de apuesta para que chicos y chicas puedan apropiarse de saberes valiosos para comprender, dar sentido, interrogar y desenvolverse en el mundo que habitamos.

Quienes hacemos los *Cuadernos para el aula* pensamos en compartir, a través de ellos, algunos "hilos" para ir construyendo propuestas para la enseñanza a partir de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Así, estos Cuadernos buscan tramar algunos saberes priorizados en múltiples itinerarios de trabajo, dejando puntas y espacios siempre abiertos a nuevos trazados, buscando sumar voces e instancias de diálogo con variadas experiencias pedagógicas. No nos mueve la idea de hacer propuestas inéditas, de "decir por primera vez". Por el contrario, nos mueve la idea de compartir algunos caminos, secuencias o recursos posibles; sumar reflexiones sobre algunas condiciones y contextos específicos de trabajo; poner a conversar invenciones de otros; abrir escenas con múltiples actores, actividades, imágenes y lecturas posibles.

Con ese propósito, el Ministerio Nacional acerca esta serie que progresivamente se irá nutriendo, completando y renovando. En esta oportunidad, damos continuidad a la colección presentando un nuevo libro para el Nivel Inicial y uno para cada campo de conocimiento priorizado para el Segundo Ciclo de la EGB/Nivel Primario: uno de Lengua, uno de Matemática, uno de Ciencias Sociales y uno de Ciencias Naturales para cada año/grado. En tanto propuesta abierta, los *Cuadernos para el aula* también ofrecen aportes vinculados con otros saberes escolares. En esta oportunidad, se suma una propuesta para trabajar en los dos primeros ciclos de la escolaridad primaria en el área Tecnología. En todos los casos, siempre incluyendo reflexiones que traman los aspectos específicos de las disciplinas escolares con reflexiones sobre temas pedagógico-didácticos que constituyen renovadas preocupaciones sobre la enseñanza.

Sabemos que el espacio de relativa privacidad del aula es un lugar donde resuenan palabras que no siempre pueden escribirse, que resisten todo plan: espacio abierto al diálogo, muchas veces espontáneo, otras ritualizado, donde se condensan novedades y rutinas, silencios y gestos, lugar agitado por preguntas o respuestas impensadas o poco esperadas, lugar conocido y enigmático a la vez, lugar de la prisa. En esos vaivenes de la práctica, paradójicamente tan reiterativa como poco previsible, se trazan las aristas que definen nuestra compleja identidad docente. Una identidad siempre cambiante -aunque imperceptiblemente- y siempre marcada por historias institucionales del sistema educativo y sociocultural más general; una identidad que nos hace ser parte de un colectivo docente, de un proyecto pedagógico, generacional y ético-político.

Desde los *Cuadernos para el aula*, como seguramente podrá ocurrir desde muchas otras instancias, nos proponemos poner en foco las prácticas desplegadas cada día. En ese sentido, la regulación y el uso del tiempo y el espacio en el aula y fuera de ella, las formas que asumen la interacción entre los chicos y chicas, las formas en que los agrupamos para llevar adelante nuestra tarea, la manera en que presentamos habitualmente los conocimientos y las configuraciones que adopta la clase en función de nuestras propuestas didácticas construidas para la ocasión son dimensiones centrales de la vida en el aula; una vida que muchas veces se aproxima, otras niega y otras enriquece los saberes cotidianos que construyen los chicos en sus ámbitos de pertenencia social y cultural.

Queremos acercarnos a ese espacio de las prácticas con una idea importante.

Las propuestas de los *Cuadernos para el aula* dialogan a veces con lo obvio, que por conocido resulta menos explorado. Pero al mismo tiempo parten de la idea de que no hay saberes pedagógico-didácticos generales o específicos que sean universales y por tanto todos merecen repensarse en relación con cada contexto singular, con cada historia de maestro y de hacer escuela.

Este hacer escuela nos reúne en un tiempo en el que subsisten profundas desigualdades. Nuestra apuesta es aportar a superarlas en algún modesto sentido, con conciencia de que hay problemas que rebasan la escuela, y sobre los cuales no podemos incidir exclusivamente desde el trabajo pedagógico. Nuestra apuesta es contribuir a situarnos como docentes y situar a los chicos en el lugar de ejercicio del derecho al saber.

Desde ese lugar hablamos en relación con lo prioritario hoy en nuestras escuelas y aulas; desde ese lugar y clave de lectura, invitamos a recorrer estos Cuadernos. Sabemos que es en el patio, en los pasillos, en la sala de maestros y maestras y en cada aula donde se ponen en juego novedosas búsquedas, y también las más probadas respuestas, aunque las reconozcamos tentativas. Hay siempre un texto no escrito sobre cada práctica: es el texto de la historia por escribir de los docentes en cada escuela.

Esta serie precisamente pretende ser una provocación a la escritura. Una escritura que lea y recree, una escritura que discuta, una escritura que dialogue sobre la enseñanza, una escritura que seguirá agregando páginas a estos Cuadernos.

El equipo de *Cuadernos para el aula*

Índice

Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo

Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo

Palabras previas

Quienes enseñamos necesitamos revisar permanentemente qué hacemos y para qué lo realizamos. Sabemos, por una parte, que cada una de nuestras experiencias tiene características singulares e irrepetibles; así, cada año, un nuevo grupo de alumnos nos plantea un desafío renovado. Por otra parte, los conocimientos que enseñamos y nuestras estrategias de enseñanza también se modifican; y son, además, cajas de resonancia de múltiples transformaciones y necesidades que tienen lugar en la sociedad, en sentido amplio y, en particular, en los campos de saber.

Por eso, en estas páginas volvemos sobre ciertos aspectos de la tarea de enseñar que seguramente no son nuevos, pero sí centrales para promover mejores aprendizajes.

Preguntarse qué significa aprender Matemática; qué se entiende por enseñar mediante la resolución de problemas y qué se concibe como problema; analizar cómo influye la gestión de la clase en el tipo de aprendizaje que logren los alumnos; estar actualizado respecto de algunos avances de las investigaciones didácticas; todo ello puede ayudarnos a realizar una relectura de las prácticas habituales, encontrar nuevos sentidos para lo que hacemos y reinventar así nuestras propuestas.

Pensar la actividad matemática en la ciencia y en la escuela

El conocimiento matemático, como ocurre con otros conocimientos y con las producciones culturales en general, ha ido generándose y transformándose en diferentes momentos históricos, en diálogo permanente con problemas que tienen lugar en los distintos entornos sociales y culturales.

Cuando se quiere estudiar una determinada situación o interactuar con ella desde la Matemática, se formulan preguntas que pueden referirse tanto al mundo natural y social como a la misma Matemática. Para responderlas, se utilizan **modelos matemáticos** conocidos o se elaboran conjeturas y se producen nuevos modelos. En todos, las conclusiones que se elaboran se interpretan para determinar si responden o no a las preguntas planteadas inicialmente.

También forma parte de este proceso mejorar la eficacia de los modelos que se crean y de las formas de comunicar los descubrimientos, así como establecer relaciones entre lo nuevo y lo que ya se conoce.

El proceso de construcción y las conclusiones resultantes tienen rasgos específicos: un modo particular de pensar y proceder, y conocimientos con características particulares. Estos conocimientos permiten **anticipar** el resultado de algunas acciones sin realizarlas efectivamente. Por ejemplo, para determinar ***de cuántas formas distintas puedo combinar 5 entradas, 12 platos centrales y 10 postres diferentes en un restaurante,*** es posible calcular el producto 5 x 12 x 10 sin necesidad de armar las diferentes posibilidades y contarlas. Por otra parte, los resultados se consideran **necesariamente verdaderos** si, para obtenerlos, se han respetado reglas matemáticas. Por ejemplo, para la multiplicación planteada en el problema anterior, se puede justificar que 5 x 12 x 10 = 5 x 2 x 6 x 10 = (5 x 2) x x 10 x 6 = 10 x 10 x 6, aplicando propiedades de la multiplicación. En el mismo sentido, al trabajar con figuras en geometría es posible afirmar, aun sin hacer ningún dibujo, que si se construye un cuadrilátero cuyas diagonales son distintas, este no puede ser un cuadrado pues, si lo fuera, tendría sus diagonales iguales.

A la vez, la obtención de nuevos resultados conlleva la necesidad de crear un lenguaje para comunicarlos. Los números, las figuras y las relaciones tienen **representaciones** cuyo uso se conviene entre los matemáticos.

De esta manera, la actividad matemática en la ciencia está muy fuertemente ligada a la resolución de problemas y a un modo particular de razonar y comunicar los resultados.

Esta forma de trabajar en Matemática debería ser también la que caracterice la actividad en el aula desde los inicios de la escolaridad. Se trata de que los alumnos **entren en el juego matemático,** es decir, que se ocupen de producir conocimientos nuevos (para ellos) frente a los problemas que se les planteen, y que debatan para validarlos. Luego, con la intervención del maestro, los reconocerán como conocimientos que forman parte de la Matemática. Así, en la escuela, los niños deberían ser introducidos en la cultura matemática, es decir, en las formas de trabajar "matemáticamente".

Desde esta perspectiva, entendemos que **saber Matemática** requiere dominar los conocimientos de esta disciplina para utilizarlos como instrumentos en la resolución de problemas, y también para definirlos y reconocerlos como objetos de una cultura.

Reconsiderar el sentido de la Matemática en la escuela

La concepción que cada persona se va formando de la Matemática depende del modo en que va conociendo y usando los conocimientos matemáticos. En este proceso, la escuela tiene un rol fundamental, ya que es allí donde se enseña y se aprende de un modo sistemático a usar la Matemática. El tipo de trabajo que se realice en la escuela influirá fuertemente en la relación que cada persona construya con esta ciencia, lo que incluye el hecho de sentirse o no capaz de aprenderla.

Cuando la enseñanza de la Matemática, en lugar de plantearse **como la introducción a la cultura de una disciplina científica,** se presenta sólo como el dominio de una técnica, la actividad en el aula se limita a reconocer, luego de las correspondientes explicaciones del maestro, qué definición usar, qué regla hay que aplicar o qué operación "hay que hacer" en cada tipo de problema. Se aprende qué hacer, pero no para qué hacerlo ni en qué circunstancia hacer cada cosa. Esta enseñanza ha derivado en dificultades que ya conocemos: por una parte, aunque permite que algunos alumnos logren cierto nivel de "éxito", cuando el aprendizaje se evalúa en términos de respuestas correctas para problemas tipo, deja afuera a muchos alumnos que no se sienten capaces de aprender Matemática de este modo. Por otra parte, lo así aprendido se demuestra claramente insuficiente en el momento en que se trata de usar los conocimientos para resolver situaciones diferentes de aquellas en las que se aprendieron.

Otras veces, la actividad en el aula incluye la resolución de problemas diversos, y se pasa de uno a otro y a otro sin un trabajo reflexivo que vuelva sobre lo realizado. Trabajar solo resolviendo problemas, sin explicar o fundamentar "matemáticamente", también es insuficiente. El trabajo que implica volver sobre lo realizado, por uno mismo o por los compañeros, exige siempre una explicitación, un reconocimiento y una sistematización del conocimiento que se pone en juego en la resolución de los problemas, en las formas de obtenerlo y de validarlo. Sin este proceso, los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela (las nociones y las formas de trabajar en Matemática) no tendrán, a futuro, las mismas posibilidades de reutilización, ya que quedarían asociados a su uso en algunos casos particulares.

En síntesis, "cómo" se hace Matemática en el aula define, al mismo tiempo, "qué" Matemática se hace, y "para qué" y "para quiénes" se la enseña, lo que plantea una disyuntiva central en relación con la construcción de las condiciones que posibilitan el acceso a la Matemática de unos pocos o de todos.

Priorizar un tipo de trabajo matemático

Resulta pues vital que prioricemos en la escuela, desde el momento en que los niños se inician en el estudio de la Matemática, la **construcción del sentido** de los conocimientos por medio de la resolución de problemas y de la reflexión sobre estos, para promover así un modo particular de trabajo matemático que esté al alcance de todos los alumnos y que suponga para cada uno:

- Involucrarse en la resolución del problema presentado, vinculando lo que se quiere resolver con lo que ya se sabe y plantearse nuevas preguntas.

- Elaborar estrategias propias y compararlas con las de sus compañeros considerando que los procedimientos incorrectos o las exploraciones que no los llevan al resultado esperado son instancias ineludibles y necesarias para el aprendizaje.
- Discutir sobre la validez de los procedimientos realizados y de los resultados obtenidos.
- Reflexionar para determinar qué procedimientos fueron los más adecuados o útiles para la situación resuelta.
- Establecer relaciones y elaborar formas de representación, discutirlas con los demás, confrontar las interpretaciones sobre ellas y acerca de la notación convencional.
- Elaborar conjeturas, formularlas, comprobarlas mediante el uso de ejemplos o justificarlas utilizando contraejemplos o propiedades conocidas.
- Reconocer los nuevos conocimientos y relacionarlos con los ya sabidos.
- Interpretar la información presentada de distintos modos, y pasar de una forma de representación a otra según su adecuación a la situación que se quiere resolver.
- Producir textos con información matemática avanzando en el uso del vocabulario adecuado.

Elegir los problemas

Estamos afirmando que el sentido de los conocimientos matemáticos se construye al resolver problemas y reflexionar sobre ellos. Esto nos plantea, en principio, algunos interrogantes centrales: ¿qué problemas presentamos?, ¿cómo conviene seleccionar el repertorio de actividades para un determinado contenido y un grupo particular de alumnos?

En principio, la posibilidad de dominar una noción matemática con suficiente nivel de generalidad como para poder utilizarla en distintas situaciones dependerá de que la variedad de problemas considerados al estudiarla sea representativa de la diversidad de contextos de uso, de significados y de representaciones asociados a la noción. También habrá que tener en cuenta que la noción que se quiere enseñar surja como una "herramienta necesaria" para resolver el problema y no como una definición que hay que aplicar, y que la presentación de la información no fomente ideas estereotipadas acerca de los modos de resolución.

Consideramos que cada actividad constituye un **problema matemático** para un alumno en la medida en que involucra un enigma, un desafío a sus conocimientos matemáticos, es decir, si estos le permiten iniciar la resolución del problema y, para hacerlo, elabora un cierto procedimiento y pone en juego las nociones que tiene disponibles, modificándolas y estableciendo nuevas relaciones.

En este sentido, la actividad que puede resultar problemática para un alumno no lo es necesariamente para otro, puesto que depende de los conocimientos de que dispone. Así, para atender la heterogeneidad en cada grupo de alumnos respecto de sus conocimientos iniciales y dar a todos la posibilidad de construir una solución es necesario plantear buenas preguntas, confiar en que todos los niños pueden responderlas de algún modo, admitir diferentes procedimientos y, luego, trabajar con los conocimientos que surjan para avanzar hacia los que se quiere enseñar por medio del planteo de nuevas preguntas.

Los contextos

Se parte de la idea de que una noción matemática cobra sentido a partir del conjunto de problemas en los cuales resulta un instrumento eficaz de resolución.

Esos problemas constituyen el o los contextos para presentar la noción a los alumnos. Por ejemplo, el cálculo de puntos en un juego, la construcción de una figura, la elaboración de un procedimiento para realizar un cálculo son contextos posibles para presentar la suma, los rectángulos o la propiedad conmutativa.

Para cada noción es posible considerar diferentes contextos que nos permitan plantear problemas en los que la resolución requiera su uso. Estos contextos podrán ser matemáticos o no, incluyendo entre estos últimos los de la vida cotidiana, los ligados a la información que aparece en los medios de comunicación y los de otras disciplinas.

Por ejemplo, la noción de multiplicación de decimales es frecuentemente tratada por medio de la resolución de problemas, como *¿Cuál es el precio de 2,5 kg de carne sabiendo que el kg vale $ 8,7?* En este caso, se trata de un **contexto no matemático** de la vida cotidiana. También habrá que plantear que *calculen el área de un rectángulo de 2,5 de base y 8,7 de altura* (expresadas en una unidad arbitraria de longitud), que también requiere realizar una multiplicación. En este caso se trata de un **contexto matemático.** En los dos casos, la multiplicación es el instrumento que resuelve el problema: la noción está contextualizada y "funciona" en esos casos particulares.

En este sentido, al producir la solución, el alumno sabe que en ella hay conocimiento matemático, aunque no logre identificar cuál es. Para que pueda reconocerlo, tendremos que intervenir nombrando las nociones del modo en que se usa en la disciplina y reformulando las conclusiones alcanzadas por el grupo con representaciones lo más próximas posibles a las convencionales, es decir reconociendo como conocimientos matemáticos los que se usaron como instrumento de resolución, ahora independientemente del contexto. Asimismo, se podrá relacionar esos conocimientos con otros que fueron trabajados anteriormente.

Al presentar cada noción en diferentes contextos, y descontextualizarla cada vez, se amplía el campo de problemas que los alumnos pueden resolver con ella. De este modo, con cada nuevo problema, los chicos avanzan en la construcción de su sentido.

En todos los casos, los contextos tendrán que ser **significativos** para los alumnos, es decir que implicarán un desafío que puedan resolver en el marco de sus posibilidades cognitivas y sus experiencias sociales y culturales previas. Asimismo, los conocimientos involucrados en el problema deberán cobrar interés para ellos y ser coherentes desde el punto de vista disciplinar.

Al interactuar en su vida social, los niños aprenden las prácticas habituales de cada comunidad y construyen saberes, algunos de los cuales están ligados a la Matemática. Son estos saberes los que debemos recuperar en la escuela para vincularlos con los conocimientos que deben aprender, ya sea para reconocerlos como parte de ellos y sistematizarlos, como para utilizarlos en nuevos contextos. De este modo, es esperable que los alumnos puedan incorporar en su vida cotidiana nuevas prácticas superadoras y valorar el aporte brindado por la escuela para su adquisición.

Los resultados de investigaciones realizadas sobre el uso de conocimientos matemáticos en situaciones de la vida cotidiana, como hacer compras de alimentos, dan cuenta de los múltiples factores que determinan las decisiones que tomamos acerca de "cuánto" compramos y muestran que a veces no utilizamos conocimientos matemáticos. Por ejemplo, tenemos en cuenta las preferencias o necesidades de los integrantes de la familia y no sólo la relación precio/cantidad o restringimos la compra a la cantidad de dinero disponible. Al formular ese tipo de problemas con propósitos de enseñanza, seleccionamos algunos datos que intervienen en la situación o contexto real. Así, las relaciones que se establecen entre los datos para encontrar la respuesta están más relacionadas con los conocimientos que se quieren enseñar que con la situación real que da origen al problema.

Al elegir los problemas, también es esencial revisar los enunciados y las preguntas que presentamos, pues muchas veces se incluyen preguntas que carecen de sentido en sí mismas, pues no aluden a problemas reales o verosímiles. Por ejemplo, si en un enunciado se habla de la suma de las edades de dos hermanos o de la cantidad de hormigas de dos hormigueros, cabe preguntarse quién puede necesitar estos valores y para qué.

Un contexto muy utilizado en la clase de Matemática es el de los juegos. El sentido de incluirlo va más allá de la idea de despertar el interés de los alumnos. Jugar permite "entrar en el juego" de la disciplina Matemática, pues se eligen arbitrariamente unos puntos de partida y unas reglas que todos los participantes acuerdan y se comprometen a respetar. Luego, se usan estrategias que anticipan el resultado de las acciones, se toman decisiones durante el juego y se realizan acuerdos frente a las discusiones.

No debemos perder de vista que, al utilizar el juego como una actividad de aprendizaje, la finalidad de la actividad para el alumno será ganar, pero nuestro propósito es que aprenda un determinado conocimiento. Por eso, el hecho de jugar no es suficiente para aprender: la actividad tendrá que continuar con un momento de reflexión durante el cual se llegará a conclusiones ligadas a los conocimientos que se utilizaron durante el juego. Luego, convendrá plantear problemas de distinto tipo en los que se vuelvan a usar esos conocimientos: partidas simuladas, nuevas instancias de juego para mejorar las estrategias, tareas a realizar con los conocimientos descontextualizados.

Los significados

Cada noción matemática resuelve un cierto conjunto de problemas; sin embargo, no tiene el mismo significado en todos los casos. Por ejemplo, el número racional 3/4 es respuesta a distintos problemas. Veamos algunos: *Si de 4 bolitas, 3 son negras, ¿qué parte de las bolitas es negra?; María tiene 3 tortas para repartir en partes iguales entre sus 4 hijos, ¿cuánto come cada uno?; si el segmento A mide 3 cm y el segmento B mide 4 cm, ¿cuál es la medida de A en relación a B?* En estos problemas se establecen diferentes relaciones entre las cantidades involucradas. En el primer problema, 3/4 representa la relación entre una parte (en este caso subconjunto de cardinal 3) con el todo (conjunto de cardinal 4). En el segundo problema, 3/4 indica el resultado de dividir 3 entre 4 (en este caso repartir 3 entre 4), mientras que en el tercer problema, indica la medida de un objeto, resultado de la comparación entre los tamaños del segmento A y del segmento B.

Cada uno de estos significados exige y pone en funcionamiento aspectos diversos del concepto de número racional y también de distinto orden de complejidad. Esto obliga a pensar en cómo es posible organizar su abordaje en el tiempo.

A lo largo de su recorrido por el Segundo Ciclo, los alumnos deben ir trabajando con estos significados, pero a su vez en cada uno de ellos se requiere del planteo de distintos problemas que permita tratar aspectos relativos al orden de racionales, a la equivalencia, a la operatoria aditiva y multiplicativa. Esto indica que para cada significado es necesaria la construcción de un conjunto de problemas de diferentes niveles de complejidad.

Las representaciones

En el conjunto de problemas que seleccionamos también es necesario tener en cuenta las distintas representaciones posibles de la noción que queremos enseñar, ya que la posibilidad de avanzar en la comprensión de una noción implica reconocerla en sus distintas representaciones pudiendo pasar de una a otra y elegir la más conveniente en función del problema a resolver.

Es importante señalar que, por ejemplo, cuando no se articulan las distintas representaciones del mismo número racional, muchos niños conciben "las fracciones" como objetos distintos de "los números decimales". Para representar un mismo número racional se pueden escribir las siguientes expresiones: 1 + 1/2; 1 1/2; 3/2; 3 x 1/2; 1,5 y 1,50, utilizar la recta numérica, establecer equivalencias con otras expresiones fraccionarias y decimales o expresiones como: 1 + 5 x 1/10 o 150%. Sin embargo, y aunque podrían ser usadas indistintamente en tanto refieren al mismo número, los contextos de uso y las estrategias de cálculo suelen determinar la conveniencia de utilizar una u otra representación.

Otras representaciones de las fracciones que suelen aparecer en las producciones de los alumnos son distintas formas gráficas, como círculos o rectángulos. En estos casos, deberían ser analizadas en el grupo, socializadas, para darles un lugar entre los conocimientos construidos en la clase y, posteriormente, incluirlas en las actividades que presentemos. El tiempo que aparentemente se "pierde" en este trabajo de analizar las representaciones en función del problema que se está resolviendo, se "gana" en la significatividad que cobran para el alumno. Del mismo modo, el uso o no de materiales "concretos" debería ser decidido por el alumno en función de sus necesidades, que estarán ligadas al estado de sus conocimientos.

Asimismo, en Geometría, para representar una figura se usan dibujos, textos que describen el conjunto de propiedades que cumple e instructivos que permiten construirla. Durante este Ciclo, habrá que propiciar discusiones acerca de las características de estas distintas representaciones, y la transformación de una en otra, para que los alumnos avancen en la conceptualización de los objetos matemáticos y los diferencien de sus representaciones. En este caso, el obstáculo fundamental es la identificación de una figura con un dibujo particular.

Al plantear los problemas, deberemos promover que la representación que cada alumno utilice sea una forma de expresar lo que está pensando, y que el debate posterior a las producciones sobre la pertinencia y economía de estas permita su evolución hacia las representaciones convencionales. Que los alumnos vayan evolucionando en el uso de las representaciones será una tarea a largo plazo.

Las relaciones entre preguntas y datos

Algunos de los problemas que se presentan y funcionan como contexto para utilizar una noción permiten trabajar lo que denominamos **tratamiento de la información.** En estos casos, tanto para los contenidos del Eje "Número y Operaciones", como para el de "Geometría y Medida", lo que se pone en juego es la relación entre las preguntas y la construcción de datos para responderlas.

Muchas veces, detectamos que los alumnos intentan resolver un problema aritmético buscando la operación que deben realizar para solucionarlo. Esa forma de enfrentarse al problema está fomentada por la estructura y el contenido de muchos enunciados que forman parte de la tradición escolar y por el tratamiento que se les da en clase. En ellos suelen aparecer todos los datos necesarios para responder a la pregunta que se hace y esta se refiere al resultado de una operación entre ellos. En muchos casos, además, el maestro que ya enseñó los cálculos propone a los alumnos que identifiquen “la” operación y espera que resuelvan el problema sin dificultad.

La resolución de problemas requiere, en cambio, generar en los chicos la necesidad de leer e interpretar el enunciado o la información que se presenta para construir una representación mental de la situación que les permita plantearse alguna estrategia inicial para su resolución. Esta necesidad se puede instalar variando tanto la forma de presentación del enunciado como el tipo de tarea que el alumno debe realizar, e incluyendo problemas que tengan una, varias o ninguna solución.

Los enunciados pueden ser breves relatos o textos informativos de otra área de conocimiento, tener datos “de más” e incluir imágenes. Las preguntas también serán variadas: algunas no se podrán contestar, otras se contestarán con un dato y sin operar, y otras requerirán hacer una operación, pero la respuesta podrá ser una información diferente del resultado de la misma. También los alumnos podrán proponer problemas, para lo cual se puede dar información y pedir que formulen preguntas o presentar datos y respuestas para elaborar una pregunta que los relacione. A la vez, tendremos que organizar la clase de modo que cada alumno pueda interpretar el problema y tomar una primera decisión autónoma a propósito de su resolución.

En Geometría, la tradición escolar sólo incluye problemas para el caso de cálculos de medidas, como el perímetro, la superficie y el volumen, y su tratamiento es el mismo que el mencionado.

La propuesta de este enfoque es problematizar el trabajo con las construcciones, considerándolas un medio para conocer las propiedades geométricas. En este sentido, las actividades de reproducción de figuras permiten a los alumnos poner en juego en forma implícita las propiedades involucradas y avanzar luego hacia otras que requieran su explicitación. Además, en Segundo Ciclo es importante proponer problemas con una, varias o ninguna solución, como por ejemplo determinar cuáles son las figuras que cumplen un conjunto de condiciones iniciales.

Construir condiciones para resolver problemas

Para que cada alumno se involucre en el juego matemático, además de elegir un problema desafiante pero adecuado para sus conocimientos, y en el que la noción a enseñar sea un instrumento eficaz de resolución, es necesario tener en cuenta un conjunto de condiciones: cuáles son los materiales necesarios, qué interacciones prevemos derivadas de la forma de organizar la clase y nuestras intervenciones durante su transcurso.

Cuidar estas condiciones, anticiparlas al planificar la clase, es, en realidad, uno de nuestros grandes desafíos como maestros.

Las situaciones de enseñanza

En algunas ocasiones, la tarea que se propone al alumno puede presentarse sólo mediante el enunciado de un problema o con una pregunta para un conjunto bien elegido de cálculos o con un interrogante que deba ser respondido a partir de una información publicada en el diario o en un texto de Ciencias Naturales o de Ciencias Sociales. En otras ocasiones, habrá que proporcionar los instrumentos de Geometría para realizar una construcción o los materiales para un juego –por ejemplo dados y tablas para anotar puntajes–, el croquis de un recorrido, un mapa, etc. En todos los casos, una primera condición es asegurarnos de tener disponibles los **materiales** a utilizar.

También habrá que anticipar cuál es el **tipo de interacciones** que queremos que se den para organizar distintos momentos de la clase: las de cada alumno y el problema, las de los alumnos entre sí y las de los alumnos con el maestro. Para ello, habrá que proponer, según convenga y de manera no excluyente, momentos de trabajo en forma individual, en pequeños grupos o con toda la clase.

Los niños podrán realizar diferentes tareas. En algunas ocasiones, trabajarán usando los conocimientos matemáticos de manera implícita, sin nombrarlos ni escribirlos, por ejemplo, al medir, construir, decidir cómo jugar o calcular. En otras, utilizarán los conocimientos matemáticos de manera explícita: tendrán que describir cómo midieron o calcularon, qué instrumentos usaron para construir y qué hicieron en cada paso, o producirán un instructivo para que otro construya una figura o realice un cálculo, explicarán por qué decidieron utilizar un procedimiento u otro, cómo pueden comprobar que un resultado es adecuado. También darán razones para convencer a otro compañero de que los números encontrados o las figuras dibujadas cumplen con las condiciones del problema; tendrán que argumentar sobre si un procedimiento es o no correcto. En otras oportunidades, será el maestro el que presente una afirmación para que los alumnos discutan sobre su validez.

En Segundo Ciclo, es importante también que los alumnos comiencen a analizar el **nivel de generalidad** que tienen las respuestas a los problemas que resuelven. Así, comprobar que se pueden obtener dos triángulos iguales plegando un cuadrado de papel glasé no es suficiente para afirmar que las diagonales de cualquier cuadrado son congruentes. Asimismo, habrá que descubrir y explicitar que algunas afirmaciones son verdaderas en un campo numérico, o para un conjunto de figuras, y no lo son para otros. Por ejemplo, el producto de una multiplicación es mayor que cualquiera de sus factores, siempre que se opera con números naturales, pero esto no es cierto si, por ejemplo, los factores son números racionales menores que 1.

Al anticipar el desarrollo de la clase y prever las condiciones necesarias para que ocurran las interacciones que nos interesan, diseñamos una **situación problemática** a propósito del conocimiento que queremos enseñar. Esta situación incluye un conjunto de elementos y relaciones que estarán presentes en la clase: el problema, los materiales, una cierta organización del grupo, un desarrollo con momentos para diferentes intercambios. Al planificar, también anticipamos los diferentes procedimientos y las representaciones que podrán usar los alumnos, nuestras preguntas y las conclusiones matemáticas posibles.

La gestión de la clase

Hemos planteado ya que, para que los alumnos desarrollen el tipo de trabajo matemático que buscamos promover, serán fundamentales las intervenciones del docente durante la clase.

El trabajo de resolución de problemas que se propone en este enfoque genera muchas veces inseguridad. Pensamos *¿cómo voy a presentar este problema si no muestro antes cómo hacerlo?*, *¿cómo voy a organizar la clase si cada uno responde de una manera distinta?* o *¿cómo voy a corregir si hay distintos procedimientos en los cuadernos?* Respecto de la primera pregunta, para iniciar el aprendizaje de un nuevo conocimiento en el proyecto de cada año escolar tendremos que **presentar un problema** asegurándonos de que todos hayan comprendido cuál es el desafío que se les propone. Para que cada alumno acepte ocuparse de él, es esencial generar el deseo de resolverlo. Este tipo de intervención, que busca que el alumno se haga cargo de la resolución, es siempre parte del inicio de la clase, pero puede reiterarse en distintos momentos, toda vez que sea necesario y oportuno. Es una invitación para que el chico resuelva por sí solo y no una orientación sobre cómo debe hacerlo o qué debe hacer.

Para comenzar, los niños lo **resuelven** de manera individual o en pequeños grupos, con diferentes procedimientos, según los conocimientos de los que dispone cada uno. Por ejemplo, en 4º año/grado, aunque aún no se haya trabajado sobre las cuentas de dividir es posible plantear a los niños un problema como: *Los lápices se venden en paquetes de a 10, ¿cuántos paquetes se deben comprar para dar un lápiz a los 127 niños de la escuela? ¿Y si fueran 250 niños?* Los niños podrán recurrir a una variedad de procedimientos para resolverlo: procedimientos aditivos o sustractivos, de a diez, de a dobles; o procedimientos multiplicativos.

Luego, habrá que dar lugar a un **intercambio** donde participen todos los alumnos y en el que se vayan explicando las diferentes aproximaciones al conocimiento que se quiere enseñar, y debatir sobre ellas. Al analizar las diferentes soluciones, tendremos que valorizar de igual modo todas las producciones, ya sea que permitan o no arribar a una respuesta al problema planteado.

Al dar lugar a la presentación y explicación de los procedimientos utilizados por los chicos, es necesario animarlos a **dar razones** de lo realizado, a explicar por qué lo hicieron de cierta forma, a argumentar sobre la validez de sus producciones. Esto les permitirá volver sobre lo que han pensado, para analizar sus aciertos y errores, y controlar, de este modo, el trabajo. Alentarlos a hablar o participar a aquellos que no lo hacen espontáneamente significa trabajar suponiendo que los chicos pueden progresar y no que van a fracasar.

En algún caso, recuperar todas las producciones escritas distintas, y presentarlas en conjunto para compararlas y discutir cómo mejorar cada una, puede contribuir a “despersonalizar” las mismas, focalizando el análisis en su validez o nivel de generalidad y no en los conocimientos de quienes las elaboraron. Así el “error” de unos se capitaliza en la reflexión de todos.

Este trabajo incorpora a los alumnos en el proceso de evaluación en un lugar diferente del habitual, donde quedan a la espera de la palabra del docente que les ratifica de inmediato si lo que hicieron está bien o no. Si han asumido como propia la tarea de resolución, querrán saber si lo producido es o no una respuesta a la pregunta que organizó el quehacer matemático en el aula. El debate del conjunto de la clase dará por válida o no una respuesta, y llevará a la modificación de los procedimientos que conducen a errores.

En un comienzo, las razones que los alumnos den al debatir se apoyarán en ejemplos, comprobaciones con materiales como plegar papeles o tomar medidas, entre otros casos, para luego avanzar hacia el uso de propiedades.

A la vez, estas últimas se enunciarán con distintos niveles de generalidad; por ejemplo, pasaremos de: *Podés hacer 4 + 3 y te da lo mismo que 3 + 4*, en el Primer Ciclo, a: *Al sumar es posible cambiar el orden de los números*, en el Segundo Ciclo.

Con la intervención del maestro, se reconocerán y sistematizarán los saberes que se van descubriendo. Esta tarea de establecer relaciones entre las conclusiones de la clase y el conocimiento matemático al que se pretende llegar, introduciendo las reglas y el lenguaje específicos, y entre los conocimientos ya incorporados y los nuevos, es una tarea que está siempre a cargo del maestro y que resulta imprescindible para que los alumnos identifiquen qué han aprendido. Para esto, no tenemos que basarnos en ningún esquema rígido. Esas intervenciones pueden darse en distintos momentos, siempre que sean oportunas; es decir que lleguen después de que los alumnos hayan desplegado sus propios razonamientos.

El camino propuesto no implica diluir la **palabra del maestro.** Cuando los chicos están resolviendo los problemas solos o con su grupo, el maestro podrá pasar cerca de cada uno, atendiendo lo que van haciendo, los términos que usan, lo que escriben, quiénes no participan y quiénes siguen atentamente –aun sin hablar– lo que hacen sus compañeros. De tal modo, el maestro tendrá un registro del conjunto de conocimientos que se despliegan en la clase. Esta información será fundamental para tomar decisiones en el momento del debate: ¿qué grupo conviene que hable primero?, ¿cuáles tienen una respuesta similar?, ¿qué procedimiento es el más potente para hacer avanzar el debate hacia el conocimiento que se espera enseñar? Esto permitirá optimizar el tiempo dedicado a la puesta en común, de manera que no resulte tediosa para los alumnos ya que, cuando los procedimientos son muy similares, bastará con tomar como objeto de análisis la producción de uno solo de los grupos.

El docente tampoco queda al margen del debate de la clase, puesto que es él quien lo conduce. A veces, las conclusiones a las que los chicos llegan en conjunto son parcialmente válidas. Allí, el maestro podrá decir, por ejemplo: *Por ahora acordamos que resolvemos así; en la próxima clase lo seguiremos viendo.* De esta manera, interviene en el proceso sin anticiparse, pero dejando marcas, planteando la provisoriedad de lo acordado o alguna contradicción que queda pendiente por resolver. Así, no invalidaremos el trabajo de la “comunidad clase”, pero dejaremos instalado que hay alguna cuestión que hay que seguir discutiendo.

En relación con el modo de **organizar la clase** frente a las distintas respuestas y tiempos de trabajo de los niños, los docentes muchas veces planteamos situaciones para que sean resueltas por todo el grupo, lo que nos permite valorar, corregir, hacer señalamientos a las intervenciones de los alumnos.

Es cierto que es más fácil llevar adelante el trabajo colectivo sobre un único procedimiento, pero de este modo se corre el riesgo de que sólo un grupo de alumnos participe activamente siguiendo al maestro, mientras otros se quedan al margen de la propuesta; y aunque todos lo siguieran, lo aprendido se limita a una única manera de pensar.

La alternativa que proponemos a la organización habitual de la clase, según nuestros objetivos, será organizar la actividad de distintas maneras: individual, por pares o grupos de más alumnos, y aun con distintos tipos de tareas para cada grupo o dentro del mismo grupo, alentando la movilidad de los roles y estando atentos a la posible configuración de estereotipos que, lamentablemente, algunas veces hacen que la discriminación se exprese en la clase de Matemática. Tanto los momentos de trabajo individual como los compartidos en grupo aportan al alumno un tipo de interacción diferente con el conocimiento, por lo que ambos deberán estar presentes en la clase.

Muchas veces, cuando estamos a cargo de un **plurigrado**, separamos a los niños según el año/grado que cursan, y vamos atendiendo a un grupo por vez. Sin embargo, a la hora de realizar adaptaciones a las actividades presentadas, es importante tener en cuenta el enfoque de enseñanza, de manera de no perder la riqueza de las propuestas que ofrecemos. Por ejemplo, para alcanzar determinados aprendizajes, es indispensable generar espacios de debate en los que deberían participar alumnos que compartan repertorios de conocimientos y niveles de análisis similares. Sin embargo, ocurre muy frecuentemente que en estos escenarios haya solo uno o que sean muy pocos los alumnos en alguno de los años/grados, lo que hace imposible organizar un verdadero debate entre ellos. En estos casos, proponemos agrupar niños de varios años/grados y organizar actividades con un contexto común, proponiendo una tarea distinta a cada grupo, de modo que los desafíos sean adecuados a los distintos conocimientos de los alumnos. Esto permite que al momento de la confrontación todos los alumnos puedan entender las discusiones que se originen e incluso puedan participar de las mismas, aunque no sean originadas por la actividad que le correspondió a su grupo. Por ejemplo, se podría proponer para grupos armados con niños de 4º, 5º y 6º año/grado un juego como “La escoba del uno”[1] de cartas con fracciones, diferenciando la complejidad a la hora de analizar las partidas simuladas.

En esta propuesta, **el cuaderno o la carpeta** tiene diferentes funciones: en él, cada chico ensaya procedimientos, escribe conclusiones que coinciden o no con su resolución y, eventualmente, registra sus progresos, por ejemplo, en tablas en las que da cuenta del repertorio de cálculos que ya conoce. De este modo, el cuaderno o la carpeta resultan un registro de la historia del aprendizaje y los docentes podemos recuperar las conclusiones que los alumnos hayan anotado cuando sea necesario para nuevos aprendizajes.

En este sentido, conviene además conversar con los padres que, acostumbrados a otros usos del cuaderno, pueden reclamar o preocuparse al encontrar en él huellas de errores que para nosotros juegan un papel constructivo en el aprendizaje. De todos modos, es recomendable discutir con el equipo de colegas de la escuela cómo se registra en el cuaderno la presencia de una producción que se revisará más adelante.

También el **pizarrón** tiene diferentes funciones. Allí aparecerá todo lo que sea de interés para el grupo completo de la clase, por ejemplo: los procedimientos que queremos que los alumnos comparen, escritos por un representante del grupo que lo elaboró o por el maestro, según lo que parezca más oportuno. Convendrá usar también papeles afiche o de otro tipo para llevar el registro de las conclusiones, como tablas de productos, acuerdos sobre cómo describir una figura, etc., para que el grupo las pueda consultar cuando sea necesario.

Promover la **diversidad de producciones** es un modo de incluir a todos en el aprendizaje, de generar confianza en las propias posibilidades de aprender y de poner en evidencia la multiplicidad de formas de pensar frente a una misma cuestión, así como la necesidad de acordar cuáles se consideran adecuadas en función de las reglas propias de la Matemática.

[1] Actividad propuesta en *Cuadernos para el aula: Matemática 5.*

Es muy importante instalar en la escuela las condiciones necesarias para que los niños sientan que los **errores** y los **aciertos** surgen en función de los conocimientos que circulan en la clase, es decir que pueden ser discutidos y validados con argumentos y explicaciones. Es así como pretendemos que los niños vayan internalizando progresivamente que la Matemática es una ciencia cuyos resultados y progresos se obtienen como consecuencia necesaria de la aplicación de ciertas relaciones y del debate entre quienes las plantean, y no como una práctica de la adivinación o del azar o un saber que no sufre transformaciones.

De todos modos, sabemos que seleccionar problemas y secuencias de actividades que puedan ser abordadas por los alumnos de la clase con distintas herramientas, e intervenir convenientemente para que todos puedan avanzar, supone para nosotros una dificultad mucho mayor que la de presentar un problema que la mayoría resuelve de la misma manera. Quizá nos dé un poco de tranquilidad saber que a trabajar en grupo se aprende y que, en el inicio de este aprendizaje, hay que tolerar una cuota de desorganización, hasta que los alumnos incorporen la nueva dinámica.

Una cuestión ligada a la organización de la enseñanza que conviene tener en cuenta es la de articular, en cada unidad de trabajo, algún conjunto de actividades que formen una secuencia para desarrollar cierto contenido. El criterio que utilizamos al presentar algunos ejemplos en el apartado “Propuestas para la enseñanza” es que en cada nueva actividad de una misma secuencia se tome como conocimiento de partida aquel que haya sido sistematizado como conclusión en la anterior.

Otra cuestión también ligada a la elaboración de una unidad de trabajo, y que permite mejorar el **uso del tiempo de clase,** es la articulación de contenidos. Algunos contenidos relacionados con distintos NAP pueden abordarse en una misma unidad y aún en una misma secuencia. Por ello, es conveniente tener en cuenta que la presentación de los NAP no indica un orden de enseñanza y que, antes de armar las unidades, es indispensable tener un panorama de la totalidad de la propuesta.

Evaluar para tomar decisiones

En cuanto a los objetivos con que presentamos los problemas, podemos plantear distintas opciones: para introducir un tema nuevo, para que vuelvan a usar un conocimiento con el que trabajaron pero en un contexto distinto o con un significado o representación diferentes, o para recuperar prácticas ya conocidas que les permitan familiarizarse con lo que saben hacer y lo hagan ahora con más seguridad. Pero los problemas son también un tipo de tarea que plantearemos para evaluar.

Sin desconocer que cada maestro tomará decisiones de promoción y acreditación en función de acuerdos institucionales y jurisdiccionales sobre criterios y parámetros, queremos poner énfasis en la idea de que un sentido fundamental de la evaluación es recoger información sobre el **estado de los saberes de los alumnos,** para luego tomar decisiones que permitan orientar las estrategias de enseñanza.

Las producciones de los niños dan cuenta tanto de los resultados derivados de nuestras propias estrategias de enseñanza, como de lo que aprendieron y de sus dificultades.

El modo de trabajo propuesto en estas páginas introductorias permite tomar permanentemente información sobre qué saben los chicos acerca de lo que se ha enseñado o se desea enseñar. Los problemas seleccionados para iniciar cada tema pueden funcionar para tener algunos indicios de los conocimientos del grupo y considerarlos en un sentido diagnóstico para terminar de elaborar la unidad didáctica. De este modo, la evaluación diagnóstica, en lugar de focalizarse en el inicio del año, se vincula con la planificación de cada unidad y de cada secuencia de trabajo.

Al considerar las producciones de los alumnos, pueden aparecer errores de diferente origen, pero muchas veces los que llamamos "errores" no son tales. Algunos de ellos están vinculados con una distracción circunstancial, como copiar mal un número del pizarrón que sólo habrá que aclarar. Otros, en cambio, estarán mostrando una forma de pensar provisoria, por ejemplo, cuando los chicos dicen, frente al dibujo de un cuadrado, *Esta figura no es un rectángulo.* Esto último no es cierto si se considera que el cuadrado es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos, condición que caracteriza a los rectángulos. Sin embargo, las primeras clasificaciones que realizan los niños parten de la idea de que un objeto pertenece a una única clase: si una figura es un cuadrado, no puede ser un rectángulo.

Frente a los "errores" descubiertos será necesario analizarlos, intentar comprender cómo y por qué se producen y plantear actividades de distinto tipo. Tanto en el caso de cuestiones presentes en las producciones de muchos alumnos del grupo como respecto de algunas ideas provisorias como las mencionadas respecto de la multiplicación de números racionales y de las relaciones entre cuadrado y rectángulo, habrá que volver sobre la noción involucrada en ese momento, cuestionándolos con ejemplos que contradigan sus ideas. No es evitando los "errores" como se acorta el proceso de aprendizaje, sino tomándolos como se enriquece.

Avanzar año a año en los conocimientos de Segundo Ciclo

La mayoría de las nociones matemáticas que se enseñan en la escuela llevan mucho tiempo de elaboración, por lo que es necesario delinear un recorrido precisando el punto de partida y atendiendo al alcance progresivo que debiera tener el tratamiento de las nociones en el aula.

El Eje "Número y Operaciones" incluye como aprendizajes prioritarios, durante el Segundo Ciclo, avanzar en el conocimiento del sistema de numeración y de fracciones y decimales; y en el uso de las operaciones y las formas de calcular con naturales, fracciones y decimales para resolver problemas. Al finalizar el Ciclo, se espera lograr que los chicos puedan analizar las relaciones entre las distintas clases de números y sus distintas representaciones, iniciando la sistematización de relaciones numéricas y propiedades de las operaciones.

Para ello, en relación con los **números naturales** y según lo abordado en el Primer Ciclo, en el Segundo Ciclo se parte de los conocimientos que los niños tienen sobre las relaciones entre la serie numérica oral y la serie numérica escrita hasta el orden de las unidades de mil y las vinculaciones entre la descomposición aditiva y la descomposición aditiva y multiplicativa de los números (456 se puede descomponer como 400 + 50 + 6 y como 4 x 100 + 5 x 10 + 6 x 1) para trabajar con números más grandes, analizando equivalencias de escrituras, procedimientos de orden y comparación basados en distintas representaciones y la conveniencia de una u otra, según el problema puesto en juego.

Con respecto a los **números racionales**, en 3er año/grado los niños han tenido aproximaciones a algunas fracciones y algunos decimales surgidas al abordar situaciones del Eje "Geometría y Medida". En 4º año/grado, se usan expresiones fraccionarias y decimales de los números racionales asociadas a contextos que les dan significado, como el de la medida, el de sistema monetario, situaciones de reparto y partición, para resolver problemas de equivalencia, orden, comparación suma y resta o producto por un natural. También se inicia el trabajo con problemas en contexto matemático que se profundiza en 5º y 6º año/grado.

A partir de 5º año/grado, se aborda la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales, y se incluye la representación en la recta numérica. En 6º año/grado, se incorpora la escritura porcentual y se avanza en la transformación de una expresión en otra, reconociendo además la conveniencia del uso de unas u otras según los problemas a resolver. Además, se inicia el reconocimiento de que las reglas del sistema de numeración estudiadas para los naturales se extienden a los racionales.

Otro aprendizaje prioritario del Eje "Número y Operaciones" es el de las **operaciones básicas,** tanto en relación con los problemas aritméticos que deben resolver los niños, como con las formas de calcular. En Segundo Ciclo, es esperable que los alumnos avancen en nuevos **significados** de la suma, la resta, la multiplicación y la división de los números naturales, y que calculen en forma exacta y aproximada con distintos procedimientos, incluyendo la construcción de otros más económicos. Este trabajo contribuirá a lo largo del ciclo a sistematizar relaciones numéricas y propiedades de cada una de las operaciones.

En particular, se iniciará en 5º año/grado la explicitación de las **relaciones de múltiplo/divisor** en la resolución de problemas, así como la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto en contextos matemáticos.

También comienzan a tratarse en forma sistemática las **relaciones de proporcionalidad,** ligadas inicialmente a la operatoria multiplicativa y avanzando hacia el análisis de sus propiedades. Los problemas que incluyen la representación de un conjunto organizado de datos mediante gráficos estadísticos (gráficos de barras, circulares y de líneas) resultan de interés para enriquecer los contextos de uso de estas relaciones.

En relación con las **formas de calcular,** es importante considerar como inicio del trabajo el uso de diferentes procedimientos en función de los conocimientos disponibles de los alumnos sobre los números involucrados y sobre las operaciones, antes de analizar y utilizar procedimientos más económicos.

La evolución de las formas de calcular con números naturales dependerá de la disponibilidad que tengan los alumnos tanto del repertorio multiplicativo como de las propiedades, de las intervenciones del docente, y de las comparaciones y validaciones que se hagan de las distintas formas de calcular que conviven en la clase. En particular, el cálculo escrito de la división debiera evolucionar desde estrategias de sucesivas aproximaciones en 4º año/grado, hasta lograr aproximaciones al dividendo en menos pasos.

La operatoria aditiva y la multiplicación por un entero con fracciones y decimales se inicia en 4º año/grado ligada a los contextos que le dan sentido. La misma avanza en 5º y 6º año/grado, tanto con las expresiones fraccionarias como con las decimales, con la intención de elaborar y comparar procedimientos de cálculo para llegar a sistematizarlos.

Al hablar de **tratamiento de la información** en relación con los contenidos del Eje “Número y Operaciones”, nos referimos a un trabajo específico que permita a los alumnos desplegar en forma progresiva ciertas capacidades, como interpretar la información que se presenta en diferentes portadores (enunciados, gráficos, tablas, etc.), seleccionar y organizar la información necesaria para responder preguntas, diferenciar datos de incógnitas, clasificar los datos, planificar una estrategia de resolución, anticipar resultados.

La lectura y organización de la información, así como su eventual recolección a partir de experiencias significativas para los alumnos, se iniciará en 4º año/grado y avanzará en el Ciclo en las formas de representación en gráficos, finalizando en 6º año/grado con problemas que requieran tomar decisiones entre distintas alternativas de organización y presentación de datos.

En el Eje “Geometría y Medida” incluimos el estudio del **espacio.** Las referencias espaciales construidas en el Primer Ciclo se articulan progresivamente en un sistema que permite ubicar los objetos en el espacio sensible, y en la representación de ese espacio en el plano. En este Ciclo, se avanza en el tamaño del espacio que se representa y en las referencias que se usen, comenzando por la elección de referencias por parte del alumno en 4º año/grado, y evolucionando hacia la inclusión de representaciones convencionales en función de un sistema de referencia dado, en 6º año/grado.

En paralelo con el estudio del espacio, se estudian los objetos **geométricos,** es decir las formas de dos y tres dimensiones. Para ello, es posible trabajar con las **figuras** y los **cuerpos** sin relacionarlos necesariamente con objetos del mundo sensible.

El avance de los conocimientos geométricos, en este Ciclo, no se plantea en relación con el repertorio de figuras y cuerpos, sino en función de las propiedades que se incluyan. Se inicia en 4° año/grado la consideración de bordes rectos o curvos, número de lados y de vértices, ángulos rectos o no para las figuras, y de las superficies curvas o planas, número y forma de las caras para el caso de los cuerpos. Para las figuras se avanza incluyendo el paralelismo de los lados y las propiedades de las diagonales. Se evolucionará también en el tipo de argumentaciones que se acepten como válidas –desde las empíricas hacia otras basadas en propiedades–, lo que irá en paralelo con la conceptualización de las figuras como objetos geométricos y con el uso de un vocabulario cada vez más preciso.

Los problemas del Eje “Geometría y Medida” en el Segundo Ciclo en principio funcionan como articuladores entre la aritmética y la geometría, en el sentido que permiten atribuir sentido a los números racionales y cuantificar ciertos atributos de los objetos y de las formas. Los problemas reales de medición efectiva de longitudes, capacidades, pesos y tiempo que se incluyan en cada año deben permitir al alumno elaborar una apreciación de los diferentes órdenes de cada magnitud y utilizar instrumentos para establecer diferentes medidas.

En este Ciclo se hace necesario, además, un trabajo profundo en relación con los cambios de unidades. En 4° año/grado habrá que establecer, a propósito de diferentes magnitudes, qué relación existe entre las unidades elegidas y las medidas correspondientes. Luego, se hace necesario avanzar en la comprensión de la organización decimal de los sistemas de unidades del SIMELA, lo que constituye un soporte interesante para la comprensión de la escritura decimal de los racionales. En 6° año/grado habrá que explicitar las relaciones de proporcionalidad involucradas en la expresión de una misma cantidad con distintas unidades.

Articular el trabajo en la clase de 4° año/grado

Al organizar unidades de trabajo, es necesario tener en cuenta, además de las decisiones didácticas que tome el docente, las vinculaciones matemáticas entre las nociones que se enseñan y que tienen que ver con su origen y, por lo tanto, con las características que le son propias.

El trabajo con los contenidos vinculados a Número y los vinculados a Operaciones supone, tanto para los naturales como para las fracciones y decimales, considerar relaciones de distinto tipo. El trabajo sobre numeración se relaciona con el de cálculo, dado que los métodos de cálculo, redondeo, aproximación y encuadramiento están ligados a la estructura del sistema de numeración decimal. Por su parte, las diferentes estrategias de cálculo exacto y aproximado dependen del significado que se les da a las operaciones en los distintos contextos.

En relación con los contenidos vinculados a Geometría y los vinculados a Medida, es necesario considerar que el estudio de las propiedades de las figuras y los cuerpos incluye nociones de medida, por ejemplo, las longitudes de los segmentos o las amplitudes de los ángulos.

A su vez, los contenidos de Medida se relacionan con los de Número y Operaciones, ya que la noción de número racional, entendida como cociente entre enteros, surge en el contexto de la medición de cantidades. Por lo tanto, habrá que avanzar simultáneamente con la comprensión de los usos de los números racionales y del proceso de medir.

En relación con las decisiones didácticas, solo señalaremos en este apartado que los contenidos de tratamiento de la información son transversales a todas las unidades de trabajo. Presentar la información de diferentes modos en los problemas y variar la tarea, tanto en los problemas aritméticos como geométricos, dará lugar a que los alumnos no conciban la idea de problema de una manera estereotipada, tanto en lo que se refiere a la forma de los enunciados como a las formas de resolución y el número de soluciones a investigar.

nap

El reconocimiento y uso de los números naturales, de la organización del sistema decimal de numeración y la explicitación de sus características, en situaciones problemáticas.

El reconocimiento y uso de fracciones y expresiones decimales de uso social habitual, en situaciones problemáticas.

El reconocimiento y uso de las operaciones entre números naturales y la explicitación de sus propiedades, en situaciones problemáticas.

El reconocimiento y uso de las operaciones entre fracciones y expresiones decimales de uso social habitual, en situaciones problemáticas.

Número y Operaciones

Número y Operaciones

Los saberes que se ponen en juego

Para que los alumnos puedan aprender los saberes incluidos en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, en la escuela tendremos que proponer situaciones de enseñanza en las que se pongan en juego distintos aspectos de estos. Se trata de que los conocimientos matemáticos se introduzcan en el aula asociados con los distintos problemas que permiten resolver, para luego identificarlos y sistematizarlos.

- Interpretar, registrar, comunicar y comparar cantidades y números naturales.[1]
- Argumentar sobre el resultado de comparaciones entre números naturales y sobre procedimientos de cálculo, utilizando el valor posicional de las cifras.
- Interpretar, registrar o comparar el resultado de una medición, de un reparto o una partición a través de distintas escrituras con fracciones.[2]
- Interpretar, registrar o comparar cantidades utilizando expresiones con una o dos cifras decimales.
- Interpretar la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales de uso frecuente para una misma cantidad.
- Comparar, entre sí y con números naturales, fracciones y expresiones con una o dos cifras decimales de uso frecuente a través de distintos procedimientos.
- Sumar y/o restar números naturales, partiendo de diferentes informaciones, con distintos significados[3] (incluyendo la composición de relaciones o transformaciones), utilizando distintos procedimientos y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.

[1] Si bien las actividades más frecuentes en 4º año/grado incluyen números de hasta 4 o 5 cifras, la complejidad de las mismas no depende necesariamente de la cantidad de cifras de los números, sino del tipo de tarea y de las relaciones involucradas.

[2] Dado que el reconocimiento y el uso de fracciones se refiere al uso social habitual, el repertorio incluirá expresiones de uso frecuente, como 11/2, 1/4, 3/4, 1/10, 1/8 y escrituras aditivas y multiplicativas como 1 + 1/2; 1/4 + 1/4; 3 x 1/4, etcétera.

[3] La complejidad está dada por el tipo de relaciones que se establecen entre los datos.

- Multiplicar y dividir números naturales con distintos significados (proporcionalidad y combinaciones), utilizando diferentes procedimientos (con y sin calculadora), decidiendo si se requiere un cálculo exacto o aproximado y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.
- Multiplicar y dividir cantidades que se corresponden proporcionalmente para calcular dobles, mitades, triples, etcétera.
- Elaborar y comparar distintos procedimientos[4] de cálculo con números naturales (exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora) para sumas, restas, multiplicaciones y divisiones por una cifra o más[5], adecuando el tipo de cálculo a los números involucrados; utilizando estimaciones, descomposiciones y propiedades.
- Analizar relaciones numéricas para formular reglas de cálculo con números naturales, producir enunciados sobre las propiedades de las operaciones y argumentar sobre su validez.
- Elaborar y responder preguntas a partir de diferentes informaciones y registrar y organizar información en tablas y gráficos sencillos.
- Sumar y restar cantidades expresadas con fracciones y decimales con distintos significados, utilizando distintos procedimientos y representaciones, y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.
- Multiplicar cantidades expresadas con fracciones y decimales por un número natural para calcular dobles, triples, etc.
- Elaborar y comparar distintos procedimientos[6] de cálculo (exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora) de sumas y restas entre fracciones y entre expresiones decimales, de multiplicaciones y divisiones de expresiones decimales por un natural, con distintos procedimientos incluyendo el encuadramiento de los resultados entre naturales y analizando la pertinencia y economía del procedimiento en relación con los números involucrados.
- Elaborar estrategias de cálculo utilizando progresivamente resultados memorizados relativos a fracciones y expresiones decimales de uso corriente (1/2 + 1/2; 1/4 +1 1/2; 1/2 + 3/4; 0,25 + 0,25; 0,50 + 1,50; dobles; etc.).

---

[4] Se incluye la comparación de procedimientos elaborados por los alumnos y de éstos con otros basados en estimaciones, descomposiciones aditivas y/o multiplicativas y propiedades.

[5] Al adecuar el tipo de cálculo a los números involucrados, la complejidad de la tarea no depende necesariamente de la cantidad de cifras de los mismos. Por ejemplo, resolver mentalmente 15.000 : 1000 puede ser más fácil que resolver 108 : 17 con lápiz y papel, dependiendo del trabajo que se haya realizado con anterioridad.

[6] Se incluye la comparación de procedimientos elaborados por los alumnos y de éstos con otros como estimaciones, representaciones gráficas, uso de descomposiciones aditivas y equivalencias numéricas de uso frecuente.

Propuestas para la enseñanza

En este apartado, intentamos precisar el alcance y el sentido de los conocimientos que se priorizan en el Eje "Número y Operaciones" a partir de algunos ejemplos de actividades para desarrollar en el aula y de producciones de los niños. Además, presentamos posibles secuencias de actividades que apuntan al aprendizaje de un contenido y muestran el tipo de trabajo matemático propuesto desde el enfoque explicitado en el apartado "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo", de este *Cuaderno*.[7]

Para avanzar en el conocimiento del sistema de numeración

A lo largo de toda la escolaridad, los niños se van aproximando y van conociendo el sistema de numeración a partir de situaciones variadas y cada vez más complejas.

Al comienzo de 4º año/grado, tendremos que aumentar el tamaño de los números, para que los niños extiendan las regularidades ya descubiertas tanto en la serie oral como en la escrita. En este momento, es importante profundizar dicho trabajo presentando situaciones en las que los alumnos expliciten las relaciones de recursividad (cada 10 elementos de un orden se obtiene 1 del orden superior) y de equivalencia entre órdenes (10 unidades forman 1 decena, 10 decenas forman 1 centena o 100 unidades, etc.), las utilicen en las argumentaciones y establezcan vínculos entre descomposiciones aditivas y multiplicativas de un número ($1234 = 1000 + 200 + 30 + 4 = 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4 \times 1$).

Asimismo, para la elección de contextos extramatemáticos[8] donde se presenten las cantidades, deberemos atender a la necesidad de utilizar números "grandes". Por ejemplo, podemos considerar el número de habitantes de una población o de asistentes a un partido de fútbol, el monto de dinero recaudado en un recital, datos vinculados con la producción de cereales, la explotación de recursos minerales, etc. Estos contextos pueden estar asociados con proyectos de otras áreas. También es necesario que presentemos problemas de contexto intramatemático, en los cuales se trabaje con números y no con cantidades.

[7] En reiteradas ocasiones, se propondrán actividades a partir de lo que se ha realizado el año/grado anterior. En los casos en que los chicos no hayan realizado dicho trabajo u otro similar, es conveniente consultar *Cuadernos para el aula: Matemática 3* para que, en función de los conocimientos del grupo, el docente decida cómo adaptar la propuesta que allí se incluye.

[8] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Los contextos", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

La posibilidad de indagar acerca de semejanzas y diferencias entre algunos números, como la presencia de las mismas cifras en distinta posición, o buscar aquellos números que cumplan determinadas condiciones, como terminar en 0 y/o estar entre 5000 y 6000, o de redondearlos, cuando tenga sentido hacerlo, permite avanzar en la argumentación oral y escrita respecto del orden y el valor posicional.

En este apartado, presentamos un conjunto situaciones en las que los alumnos tendrán que comparar cantidades y números, usando la idea de valor posicional para argumentar sobre las comparaciones. Además, presentamos otro conjunto de situaciones para analizar distintas escrituras de un número, argumentando sobre las equivalencias entre descomposiciones aditivas y multiplicativas.

Cuando los alumnos analicen distintos procedimientos de cálculo, tanto mentales como escritos, tendrán la oportunidad de reutilizar lo aprendido sobre el sistema de numeración.

Plantear situaciones para comparar cantidades y números

La comparación entre dos números permite establecer entre ellos las relaciones de mayor, menor o igual. Esta comparación se apoya en la correspondencia de las colecciones que dichos números representan y no depende del sistema de numeración elegido para representarlos. Sin embargo, elegida la representación posicional decimal, es posible comparar números sin recurrir a la correspondencia, analizando la escritura. Este es un ejemplo de las ventajas que tiene esta representación cuando se trata de trabajar con cantidades grandes.

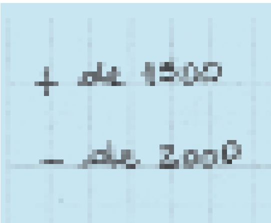
En 4º año/grado, serán de particular interés las comparaciones entre números de 5 o más cifras, como 40.800, 40.080, 48.000 y 408.000, que implican la consideración del valor posicional de las mismas cifras. En ese sentido, aunque los niños estén operando con números hasta la decena de mil, para hacer comparaciones que para ellos constituyan un desafío y no resulten evidentes, es conveniente recurrir a números más grandes.

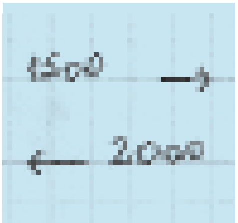
Un tipo de situaciones en las que los chicos deben establecer comparaciones son aquellas donde hay que encuadrar números entre otros. En efecto, al ubicar un número en un intervalo dado, necesariamente se realizan comparaciones del mismo con cada extremo del intervalo. Con este fin, podemos proponer un juego de adivinanzas, en el que los chicos tendrán la oportunidad de trabajar con números, estableciendo relaciones de orden y utilizando una recta numérica como soporte para representar los datos.

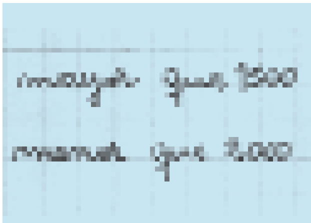
> **"Juegos de la tele":** encuadrar números, utilizar la recta numérica.
> **Materiales:** sobres con tarjetas con números naturales de cuatro cifras.
> **Organización de la clase:** se divide la clase en grupos de igual cantidad de integrantes y el maestro oficia de "locutor".
> **Desarrollo:** se les explica a los chicos que se trata de jugar como en los programas de preguntas y respuestas de la televisión, sólo que con algunas variantes. El maestro tiene una pila de sobres con un número en su interior y todos los grupos sacan un sobre al menos una vez. Se entrega el sobre al maestro-locutor, y este comunicará a toda la clase entre qué números se encuentra el que está en el sobre y que tienen como máximo 5 preguntas posibles para adivinarlo. Cada grupo hará preguntas al maestro sin que los demás escuchen para descubrir el número que está en el sobre. La amplitud del intervalo que elija el maestro será suficientemente amplia como para dar lugar a por lo menos cinco preguntas. Las respuesta a cada grupo se hará individualmente, según la pregunta que hagan y se responderá por sí o por no, en un tiempo determinado. Pasado dicho tiempo, cada grupo deberá arriesgar cuál es el número oculto en el sobre. Si aciertan el número, se acreditan 100 puntos; si sólo aciertan 1 cifra del número, ganan 25 puntos; si aciertan 2 cifras, 50 puntos y 3 cifras, 75 puntos.

En un primer momento, es conveniente que simulemos el juego sin otorgar puntaje, por ejemplo jugamos con un solo grupo, para que se comprendan las reglas. Al hacerlo, pondremos en evidencia que es necesario ir registrando la información que se obtiene luego de cada pregunta.

Por ejemplo, si el número es 1880, podríamos decir *el número está entre 1500 y 2000* y los chicos podrían escribir esa información de una forma similar a alguna de las siguientes:





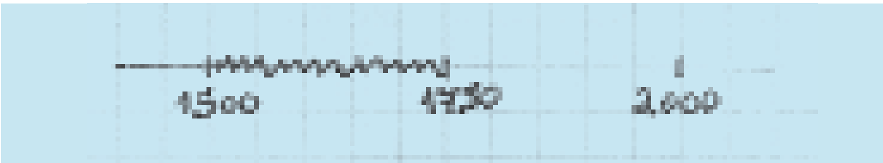


Al ir avanzando en las preguntas y respuestas, podremos introducir una discusión sobre la claridad y economía de los registros, lo que podría llevarnos a presentar en ese momento la recta numérica como un posible soporte. Por ejemplo, podemos dibujar en el pizarrón una línea y marcar los números 1500 y 2000.

Si el grupo preguntara: *¿Es menor que 1750?,* podríamos responder: *no*, al tiempo que preguntamos: *¿Cómo podemos indicar esta información en el dibujo?*

Los chicos podrán sugerir poner marcas de 100 en 100 desde 1500, por ejemplo 1600, 1700, etc. y luego buscar el punto medio entre 1700 y 1800 para indicar el 1750, o bien marcar de 50 en 50 desde 1500. Si propusieran poner un punto entre 1500 y 2000 sin precisar una escala, podríamos preguntar *¿lo marco más cerca de 1500 o de 2000?*

Luego de señalado el 1750, preguntaremos *¿cómo se podría marcar que no es menor que 1750?* y acordaremos con el grupo en hacerlo tachando la zona donde no puede estar el número.



Avanzando con las preguntas, habrá que considerar si sirven las divisiones anteriores o si habrá que hacer otras.

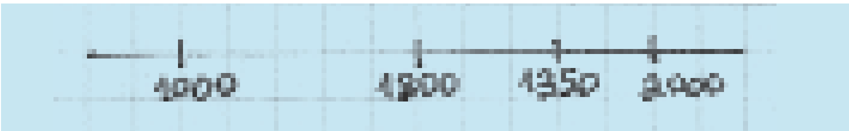
Continuaremos la partida simulada hasta que terminen con las cinco preguntas permitidas. Cuando comienza el juego para todos, cada grupo tendrá que escribir la condición que cumple el número que se encuentra en el sobre y que nosotros hemos dicho en voz alta en una recta numérica.

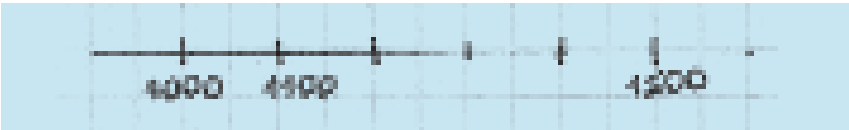
En la puesta en común, se verá cuál es la respuesta a la que arribó cada grupo, se asignarán los puntajes y propiciaremos el debate sobre cuáles fueron las preguntas realizadas: cuáles fueron más útiles y efectivas para adivinar el número con cinco preguntas como máximo.

Luego, como en cualquier propuesta de juego[9], es importante proponer situaciones para resolver individualmente, en la carpeta o en el cuaderno, que evoquen la actividad recientemente efectuada y permitan extraer conclusiones acerca de cómo es conveniente hacer las preguntas; por ejemplo:

• Un equipo recibió como dato que el número se encuentra entre 1000 y 2000, y realizó estas 4 preguntas: ¿Es mayor que 1300? ¿Es menor que 1400? ¿Es menor que 1350? ¿Es mayor que 1340? Y obtuvo un sí por cada respuesta. Si vos estuvieras jugando, ¿qué pregunta harías? ¿Qué números pueden ser?

• Los chicos estaban jugando y marcaban así los números que iban diciendo:





¿Coincidís con lo que dice marcó cada uno de los equipos? ¿Por qué?

El análisis de esta última actividad permitiría retomar la discusión sobre la forma de representar números en la recta numérica, es decir que no alcanza con marcar sobre ella los números en orden, sino que además hay que elegir el segmento unidad y conservarlo en toda la representación.

También es posible plantear otras situaciones, en la carpeta o en el cuaderno, en las que los niños intercalan números entre otros, por ejemplo:

• Ubicá los números 2902 – 3408 – 3516 – 3616 – 2503, de modo que queden ordenados en una lista de menor a mayor con los siguientes números:
2706 3418 3629
• Ana dice que quiso representar todos los números de la lista en la recta numérica pero no pudo. ¿Qué dificultades pensás que tuvo?

[9] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Los contextos”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*.

Este tipo de actividades permite considerar a la vez dos relaciones de orden, ya que intercalar cada número implica elegir un número que ha de ser a la vez mayor que un extremo, pero menor que el otro.

El trabajo de encuadramiento de números naturales en la recta numérica constituye un antecedente valioso para el encuadramiento que se propondrá realizar más adelante cuando se estudien los números racionales.

Plantear situaciones para analizar distintas escrituras de un número

Las actividades en las que los alumnos pueden realizar y analizar diferentes escrituras de los números incluyen, por una parte, aquellas en las que realizan composiciones y descomposiciones; esto les permite avanzar en el reconocimiento de las reglas del sistema de numeración. Por otra parte, algunas escrituras involucran el uso de distintas operaciones.

Para que los alumnos tengan que **componer y descomponer** cantidades, es posible plantear situaciones de comparación usando billetes y monedas como recurso, tal como se hizo en el Primer Ciclo, ya que pueden ser considerados un soporte adecuado por la naturalidad con que se producen los canjes. Sin embargo, como en 4º año/grado trabajaremos con números más grandes, será necesario fabricar billetes de 1000, 5000, 10.000, etc., que no corresponden a nuestro sistema monetario pero que podrían funcionar con sentido en el contexto de algún juego de mesa, como “Buen viaje”, “Monopoly”, etc.

Otra posibilidad para que los alumnos discutan la vinculación entre la escritura sintética de un número y su descomposición multiplicativa, es plantearles una actividad con tarjetas con números y papeles, como la siguiente.

En una caja que se deposita sobre un lugar accesible, se colocan tarjetas con números de hasta cinco cifras. Se distribuyen a los chicos papeles rectangulares con los valores 1, 10, 100, 1000 y 10.000.

Mientras nosotros vamos sacando una tarjeta de la caja y leemos el número en voz alta, cada chico deberá formar ese número con los valores que recibió y luego escribir cómo lo hizo.

Después de haber extraido de la caja cinco tarjetas, se puede hacer una puesta en común para discutir las diferentes maneras de formar los números que encontraron y también las diferentes formas de registrarlo.

Al hacer la puesta en común, podemos proponer a los alumnos que anoten lo realizado en una tabla como la siguiente:

NÚMERO	De 1000	De 100	De 10	De 1

Para complejizar la propuesta de las tarjetas con números, es posible plantear una situación parecida, pero limitando la cantidad de alguno de los papeles, por ejemplo:

- Escribí cómo armar 2405, sin usar papeles de 100.

De esta manera, estaremos promoviendo que aparezcan descomposiciones del número, tales como:

$2 \times \boxed{1000} + 40 \times \boxed{10} + 5 \times \boxed{1}$

$240 \times \boxed{10} + 5 \times \boxed{1}$

Después de trabajar con esta situación, o alguna similar en la que se ensayaron diferentes posibilidades de descomponer un mismo número, es conveniente abrir un espacio de discusión con los alumnos para que expliquen la tarea que realizaron y vinculen esa realización de equivalencias entre las unidades de los distintos órdenes. Además, estas situaciones permiten que los chicos realicen cálculos mentales y comprueben que hay problemas que pueden tener más de una respuesta correcta.

Otras actividades intramatemáticas, para que los chicos establezcan relaciones de comparación y orden, y consideren el valor posicional de las cifras son aquellas en las que se propone analizar las condiciones que cumple un número. Por ejemplo, las siguientes.

• Completá el cuadro colocando una cruz (x), cuando el número cumpla con la condición planteada en la primera hilera.

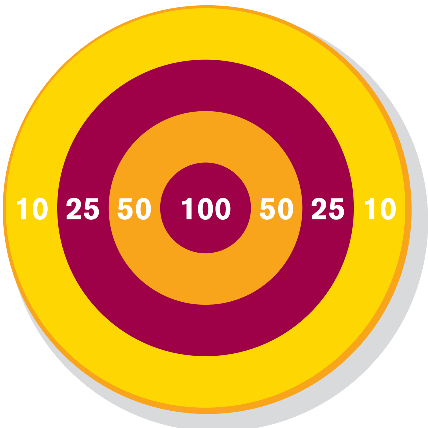
El número	Tiene una cifra par en el lugar de las decenas	Está entre 900 y 2100	Tiene menos de 4 centenas	Tiene más de 20 decenas
315				
64				
1002				

• Buscá números que cumplan con las siguientes condiciones planteadas en la primera hilera.

El número	Tiene una cifra par en el lugar de las decenas	Está entre 900 y 2100	Tiene menos de 4 centenas	Tiene más de 20 decenas
			X	
	X	X		X
			X	X

Si queremos que los alumnos encuentren **distintas escrituras de un mismo número** usando sumas y multiplicaciones, podemos proponer problemas en el contexto de juegos de emboque. Siguiendo en el camino de la producción y análisis de escrituras de cálculos, sugerimos problemas como los siguientes:

• Cuatro chicos jugaron al tiro al blanco y cada uno obtuvo 270 puntos. Sin embargo, no todos usaron la misma cantidad de dardos y expresaron sus puntajes de distintas formas. Completen la tabla.



	Martín	Diego	Nico	Nacho
Con palabras		1 dardo en el de 100, 3 en el de 50 y 2 en el de 10		2 dardos en el de 100, 1 en el de 50 y 2 en el de 10
Cuenta	(100 + 25 + 10) x 2		(5 x 50) + (2 x 10)	

En la puesta en común, podemos formular preguntas que inviten a la reflexión sobre las escrituras. Por ejemplo, para las cuentas podemos preguntar: *¿Qué hay que controlar para saber el número de dardos? ¿Cómo se sabe en qué regiones cayeron? ¿Están ajustados los valores de los puntajes de cada región?* Para las "traducción" de expresiones con palabras, podemos preguntar: *¿Cuándo usamos la suma? ¿Y la multiplicación?*

En la escritura de Martín, podremos discutir si podría haber escrito su cuenta de otra forma. Si no surgieran alternativas, podríamos presentar:

(100 x 2) + (25 x 2) + (10 x 2) es lo mismo que (100 + 25 + 10) x 2

La posibilidad de una u otra escritura nos permite explicitar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

En el mismo contexto, podemos proponer un nuevo problema que avanza sobre las condiciones que debe cumplir la escritura de un puntaje:

• Para responder a la consigna *escribir de maneras distintas un puntaje de 150 obtenido con 6 dardos*, María Inés escribió las respuestas siguientes:

a) 25 x 6 = …
b) 100 x 1 + 10 x 5 = …
c) (50 + 25) x 2 = …
d) 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 =
e) 10 x 2 + 25 x 3 + 50 =
f) 50 + 20 x 5 = …

Indicá cuáles de las escrituras responden a las condiciones pedidas y cuáles no; en cada caso explicá por qué.

Otro recurso posible es utilizar la calculadora, que por su potencia en la motivación y posibilidades que ofrece, permite plantear problemas como el que sigue, para que los chicos reflexionen sobre diferentes descomposiciones aditivas de un número y, entre ellas, la que se relaciona con la posicionalidad de nuestro sistema de numeración.

• Escribí el número 5837 en la calculadora. Luego, haciendo dos restas, conseguí que aparezca en el visor 5007. ¿Hay una única forma de lograrlo?

• Escribí en el visor el número 23.456. Después, con cinco restas, hay que lograr que aparezca el 0 en el visor. ¿Hay una única forma de lograrlo?

• Escribí en el visor de la calculadora el número 333.333. Anticipá qué aparecerá en el visor si sumás 3, mil veces. Luego, verificalo.

Al resolver el primer problema, los alumnos pueden recurrir a procedimientos como:

5837 − 800 − 30 = 5007

Resta el valor posicional de las cifras que ocupan los lugares de las decenas y las centenas.

5837 − 5007 = 830

5837 − 500 − 330 = 5007

Resta los dos números dados para saber cuánto debe sacarle al primero para obtener el segundo y luego lo hace en dos pasos.

5837 − 230 − 34 − 3000 = ¡No me da!

Resta números al azar para alcanzar el buscado.

5837 − 8 − 3 = ¡No me da!

Resta los dígitos que tiene que hacer desaparecer, 8 y 3.

Al analizar y comparar los distintos procedimientos, promoveremos que los chicos respondan a cuestiones tales como: *¿Cuál es la forma más fácil de lograrlo para cada uno? ¿Por qué?* Por ejemplo, en el caso de 5837 (5000 + 800 + 30 + 7), para que la cifra de las centenas y las decenas se transforme en 0, conviene restar 800 y luego 30. También se podría restar 500 y 330, pero las restas anteriores las indica el número.

La calculadora permite, en este problema, conocer rápidamente el resultado de las anticipaciones, y habrá que debatir con los chicos *cuántas veces se puede probar* para evitar el ensayo y error sin plan previo. Al finalizar el debate, se puede proponer que *escriban un mensaje explicando, para cualquier número, el procedimiento para hacer aparecer el 0 en el lugar de las decenas y centenas, haciendo restas.*

El uso de textos instructivos para redactar el mensaje aporta claridad a lo que se quiere transmitir y, por lo tanto, mejora la comprensión del mismo por parte de quien lo lee. Por otro lado, permite que los niños hagan explícito lo que hicieron de manera implícita al resolver.

Al hacer la puesta en común de los procedimientos escritos, podremos discutir si el procedimiento explicitado es correcto, la claridad del instructivo y también si el procedimiento sirve para cualquier número pensado por otro compañero. Además, podemos discutir si es posible utilizar el procedimiento cuando el número tiene ceros, de esta manera queda explicitado que el procedimiento más económico y el que siempre permite las anticipaciones mentales más rápidas es el que aprovecha la descomposición aditiva del número para luego, aplicando propiedades de la suma, llegar al resultado correcto.

Otras situaciones que permiten vincular el valor posicional de las cifras con procedimientos de cálculo son las que requieren inventar los datos ajustados a un interrogante, completar algunos datos o pensar un contexto y una situación vinculable a una pregunta o a un cálculo. Presentamos algunas posibilidades para abordar esta cuestión.

Estas actividades permiten trabajar en forma simultánea contenidos de tratamiento de la información y de numeración.

• Agregale una pregunta a este problema, de manera que se usen todos los datos del enunciado. Después respondela.
Un cajero automático tiene billetes de \$ 10, de \$ 50 y de \$ 100. Una persona fue un día y sacó \$ 4800.

• Inventá un problema a partir de cada una de estas preguntas:
¿Cuántos billetes de \$ 10 necesito?
¿Cuántos billetes de \$ 100 necesito?

• En un papel, sobre la mesa de un bar, quedó escrito este cálculo:
2 x 1000 + 5 x 100 + 2.
¿Podrías reconstruir una situación que pueda haber dado origen a esta cuenta?

Este proceso de producción nos permite, además de evaluar los conocimientos que van quedando disponibles, que los niños expliciten las descomposiciones multiplicativas o aditivas que utilizan.

Una actividad que se usa frecuentemente en relación con el conocimiento del sistema de numeración, sobre todo en el momento de la evaluación, es el dictado de números y su posterior ordenamiento. Para incluir esta actividad en una evaluación, deberíamos trabajarla con anterioridad en clase, tanto en su forma clásica como asociada a juegos de lotería.

La lectura de un texto informativo de Ciencias Naturales o de Ciencias Sociales (sistema solar, procesos migratorios, etc.) puede ser una ocasión significativa para escribir números grandes, si se pide a los alumnos que registren la información que consideran importante. Luego, podrán incluir esa información en una narración de lo escuchado, o en tareas de encuadramiento o de cálculo, dentro del contexto. De este modo, además de vincular la serie oral con la serie escrita, contribuimos a que los niños desarrollen competencias de escucha atenta y reflexiva.

Para leer y escribir fracciones y expresiones decimales

El estudio de los números racionales, esto es números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros (con el divisor distinto de cero), escritos en forma decimal o fraccionaria, ocupa un lugar relevante en los contenidos de enseñanza para el Segundo Ciclo. Su abordaje desembocará en un cambio fundamental con respecto a la noción de número que tienen los niños hasta el momento, ya que algunas "certezas" elaboradas en el Primer Ciclo a partir del estudio de los números naturales, y que son válidas en ese campo numérico, se vuelven "erróneas" cuando las quieren extender a los números racionales.

Pasemos revista a algunos de estos cambios, ya que habrá que tenerlas muy presentes cuando planifiquemos la enseñanza: en el conjunto de números racionales, los números ya no tienen anterior y siguiente; entre dos números racionales ya no hay un número finito de otros números; no vale como método de comparación de racionales analizar la cantidad de cifras de los mismos; la multiplicación sólo en algunos casos puede ser interpretada como una suma reiterada; el producto de dos números racionales, en muchos casos, es menor que cada uno de los factores; el resultado de una división puede ser mayor que el dividendo.

Muchas veces, cuando los alumnos de 4° o 5° año/grado aprenden reglas para comparar fracciones, para simplificarlas, para pasar de una fracción a número mixto, para escribir un número mixto como fracción y también para operar con fracciones o con decimales, las olvidan después de un tiempo. Los niños se confunden, pierden la posibilidad de aplicar esas reglas a la resolución de problemas y difícilmente se vuelven aprendizajes útiles para adquisiciones posteriores.

Para evitar estas dificultades, proponemos abordar el trabajo con los números racionales, priorizando la construcción de sentido y avanzando en la comprensión de los distintos significados de estos números, de sus distintas representaciones y de las posibles formas de cálculo. Para ello, iniciaremos el trabajo con algunas fracciones y algunos decimales, como expresiones numéricas asociadas a ciertos contextos y ligadas a problemas de partición, de reparto y de medición que no pueden ser resueltos con los números naturales.

El sentido de la noción de número racional se va construyendo, tal como ocurre con cualquier noción matemática, a partir de los diferentes problemas[10] en los que se usan estos números. Cada uno de estos usos favorece el tratamiento de algunos aspectos de la noción, pero tiene sus límites para abordar otros. Por ejemplo, las fracciones como partes de un todo potencian discusiones ligadas a las relaciones entre el tamaño y el número de las partes, pero no ayudan a tratar las fracciones mayores que uno, repertorio que es posible abordar mejor desde las situaciones de reparto. A su vez, el cálculo sobre el modelo parte/todo resulta sencillo entre fracciones menores que uno y generalmente se inicia la suma y la resta considerando fracciones del mismo denominador para pasar luego a las de distinto denominador, estableciendo equivalencias. Este criterio de progresión se flexibiliza cuando utilizamos contextos de medida que a la vez permiten trabajar con un repertorio más amplio. En estos contextos, el uso de equivalencias y de estrategias de cálculo mental posibilita resolver por ejemplo 3/4 kg + 1/2 kg, teniendo control sobre el resultado aun sin conocer el algoritmo para la suma de fracciones de distinto denominador.

En relación con la multiplicidad de significados del número racional y teniendo en cuenta que no todos pueden ser abordados al mismo tiempo, es necesario plantear alguna opción respecto de qué significados privilegiar en cada año/grado y cómo trabajar la articulación entre los mismos. Además, en relación con el tratamiento de cada significado, y dado que cada uno requiere un proceso prolongado en el tiempo, debemos tener en cuenta cómo hacer evolucionar la complejidad de los problemas que presentamos y qué alcance debemos abordar en cada año/grado. Las actividades que se incluyen a continuación ofrecen una de las alternativas posibles.

---

[10] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Los contextos", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

En este *Cuaderno* proponemos que, en 4° grado/año, las fracciones y los decimales sigan siendo utilizados por los niños como la propuesta en el año anterior, para expresar medidas en la resolución de situaciones planteadas en el Eje “Geometría y Medida”. Pero a partir de este año/grado, las fracciones y los decimales también se abordan en el Eje “Número y Operaciones”. En consecuencia, en relación con este Eje, optamos por estudiar las fracciones fundamentalmente a partir de situaciones de reparto y de partición, y los decimales a partir de situaciones de medida (dinero y longitud).

En el proyecto de enseñanza de los números racionales, también debemos interrogarnos sobre el abordaje de su escritura y sobre los aspectos que involucra cada una de sus formas de representación. Para ello, habrá que contemplar situaciones que permitan a los alumnos establecer las reglas de cada sistema de notación, diferenciarlas de las que rigen la escritura de números naturales y establecer vínculos entre las diferentes formas de representación de un mismo número racional.

Es más, es necesario considerar que los mismos contextos de uso remiten a distintas representaciones. Por ejemplo, si bien 1/4 = 0,25, para la hora usamos 1/4 y no 0,25; para el dinero usamos 0,25 y no 1/4 y para la longitud es frecuente usar tanto una expresión como otra.

La articulación entre las distintas escrituras para un mismo número es un desafío a largo plazo y, en ese sentido, en 4° y 5° año/grado trabajaremos, por una parte, con situaciones en las que se usan escrituras fraccionarias y, por otra, con contextos como el del dinero para las escrituras decimales, estableciendo las primeras relaciones entre ambas escrituras. Ya en 6° año/grado no se hará una separación explícita entre el trabajo con fracciones y con expresiones decimales, y serán las mismas situaciones las que lleven a decidir cuál es la representación más conveniente para su tratamiento.

Plantear situaciones para medir, repartir o partir usando fracciones

Tal como señalamos en el apartado anterior, los números racionales escritos en forma fraccionaria pueden usarse en distintas situaciones. En particular, podrían usarse para responder a los siguientes problemas:

• De una tableta de chocolate de 5 trozos iguales, Juan comió 4.
¿Qué parte del chocolate comió Juan?

• Juan reparte 4 chocolates entre 5 chicos para que todos coman igual.
¿Cuánto come cada niño?

• Sabiendo que el segmento A mide 4 cm y el segmento B mide 5 cm, ¿cuál es la medida del segmento A, si se toma como unidad el segmento B?

En todos los casos, es posible usar 4/5 para expresar la respuesta al problema planteado, pero es evidente que el significado[11] que ese número adquiere en cada planteo es bastante distinto: en el primer caso, 4/5 indica la relación entre las 4 partes de un todo que tiene 5 partes; en el segundo caso, expresa el resultado de repartir 4 entre 5 y, en el tercero, indica el resultado de medir una cantidad que "vale" 4 con una unidad que "vale" 5. Cada uno de estos usos diferentes se asocian con distintos significados[12] de la fracción y, a la vez que potencian algunos aspectos de este concepto, tienen sus límites para tratar otros.

Por ejemplo, los problemas en que las fracciones expresan partes de un todo potencian la discusión sobre los fraccionamientos del todo, la forma y el número de las partes obtenidas, la relación con el número de cortes, la equivalencia de las partes, pero no colaboran para tratar las fracciones mayores o iguales a la unidad, porque en los hechos de la vida cotidiana nunca una "parte" supera al todo... es más, ni siquiera lo iguala.

Veamos una posibilidad, entre otras, de articular estos significados en un proyecto de enseñanza, comenzando con **problemas de partición,** es decir con aquellos problemas que aluden a *partir un entero* en partes iguales y se refieren a una parte de ese entero en forma numérica. Por ejemplo, en enunciados como estos: *Si comí 2 de las 4 porciones de una pizza, ¿qué parte de la pizza he comido? O bien: En la bolsa hay 20 caramelos, si 5 son de menta, ¿qué parte de la bolsa de caramelos es de menta?*

Como se ve en los ejemplos, cuando hablamos de un entero, este puede ser continuo (la pizza) o un conjunto de elementos (los 20 caramelos). En estos problemas, las fracciones 1/2 (o sus equivalentes) de pizza y 1/4 (o sus equivalentes) de los caramelos de menta, están funcionado como la medida de lo que fue comido, tomando como unidad, en un caso, la pizza y, en el otro caso, el número de caramelos de la bolsa.

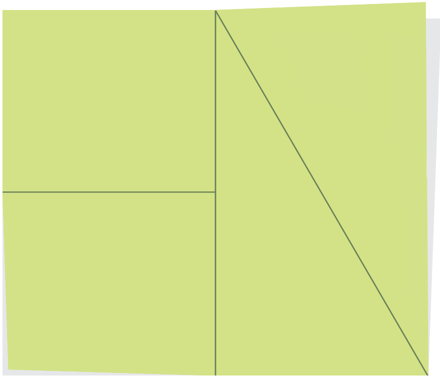
Las primeras instancias escolares de tratamiento de las fracciones otorgan a este tipo de problemas (más aun en el caso de "todos" continuos) un lugar particular, porque su abordaje ofrece la posibilidad de discutir sobre la importancia de que *las "partes" sean iguales, no se superpongan y completen el todo*, para que las expresiones del tipo a/b tengan sentido. En relación con la "igualdad" de las partes, cabe destacar que, si bien es frecuente que se consideren particiones en partes de la misma forma, esto no es lo que

---

[11] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Los significados", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno.*

[12] **Recomendación de lectura:** véanse los capítulos 5 y 6 del libro de Ponce, H. (2000), *Enseñar y aprender Matemática. Propuestas para el Segundo Ciclo,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

caracteriza a la fracción. Por ejemplo, cada una de las partes del siguiente cuadrado es un cuarto, pues es posible reconstruir el cuadrado repitiendo cuatro veces cada una de ellas:



Los problemas de partición pueden ser planteados en distintos contextos[13]. El contexto que hemos seleccionado para las actividades siguientes es el de "plegados", porque brinda la oportunidad de tratar diferentes equivalencias entre escrituras fraccionarias, la comparación y adición de algunas fracciones, y hallar ciertas fracciones de fracciones, como la mitad de la mitad, la mitad de la cuarta parte, etcétera.

Estos problemas también podrán dar lugar a comparaciones tal como se analizará en el apartado "Plantear situaciones para comparar cantidades y números expresados en forma fraccionaria y decimal", y es en estas comparaciones donde se hace necesario identificar los componentes de la escritura fraccionaria, el numerador y el denominador.

Secuencia para usar fracciones que indican la parte de un todo continuo: "Plegando rectángulos"[14]:

Si bien esta secuencia se organiza con tres actividades, es conveniente pensarla como tres momentos, algunos de los cuales pueden requerir más de una clase para su desarrollo. Esto dependerá de los avances logrados por los chicos en el conocimiento involucrado.

[13] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Los contextos", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

[14] Actividad diseñada a partir de la idea desarrollada en Saiz, I. (1987), *Fracciones. Un aprendizaje diferente*, NIM N° 2, Corrientes, mimeo.

Actividad 1

Materiales: cada grupo dispone de 25 o 30 rectángulos blancos, iguales, de 8 cm x 6 cm, aproximadamente (o papeles cuadrados de un taco o glasé) y sobres.

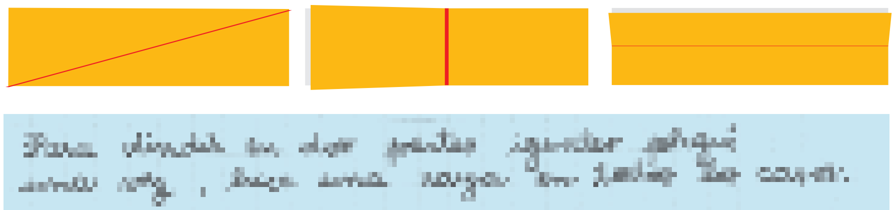
Organización de la clase: en grupos de 3 o 4 alumnos.

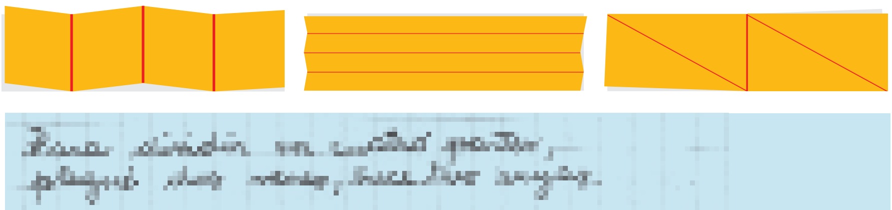
Desarrollo: como primera consigna se pide a los grupos que *encuentren diferentes formas de plegar cada papel para dividirlo en dos partes iguales y en cuatro partes iguales, y que indiquen las marcas correspondientes al plegado.* Luego, se comparan las distintas formas de hacerlo, identificando la cantidad de pliegues y la cantidad de partes.

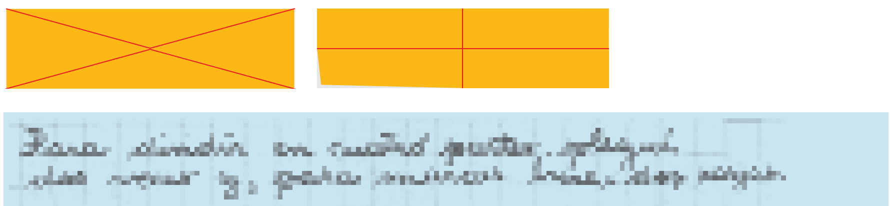
Como segunda consigna, se plantea a los grupos: *Ahora hay que dividir el rectángulo en 8 partes. ¿Con cuántos pliegues se puede hacer? ¿Cuál es la menor cantidad de pliegues que se necesitan para hacerlo?*

Luego, se propone a los alumnos hacer dos rectángulos iguales de cada uno de los modelos que hayan encontrado y guardar en un sobre todos los papeles plegados en igual número de partes, etiquetando los sobres con expresiones que permitan identificar su contenido.

Los comentarios de los alumnos en relación con la primera consigna podrán ser los que se indican en los dibujos siguientes:







En relación con la segunda consigna, los chicos podrán doblar los papeles, por ejemplo, de los siguientes modos:

Para identificar el contenido de los sobres, los distintos chicos podrán usar expresiones como: *Rectángulos divididos en cuatro partes iguales, Rectángulos divididos en cuartos,* o bien: *Rectángulos 1/4, 1/4, 1/4 y 1/4.*

Actividad 2

Materiales y organización de la clase: cada grupo dispone del material que armó en la actividad 1, es decir que cuenta con tres sobres (uno con las mitades, otro con los cuartos y el tercero con los octavos de los rectángulos).

Desarrollo: se presentan consignas como las siguientes.

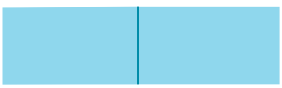
a) Vamos a pintar $\frac{1}{4}$ de uno de los rectángulos. ¿Es posible sacar un rectángulo de cualquier sobre para pintar sin tener que hacer nuevos pliegues? ¿Cómo?

b) Ahora hay que pintar la mitad de uno de los rectángulos. ¿De qué sobre conviene sacar el rectángulo? ¿Por qué?

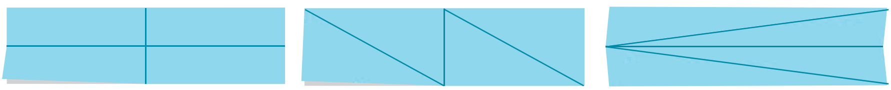
c) Si quiero pintar $\frac{1}{2}$ en un rectángulo y $\frac{3}{4}$ otro, ¿puedo sacar los rectángulos del mismo sobre? ¿Por qué?

d) Discutan cómo dividir los rectángulos para poder sombrear.

$\frac{3}{4}$ en



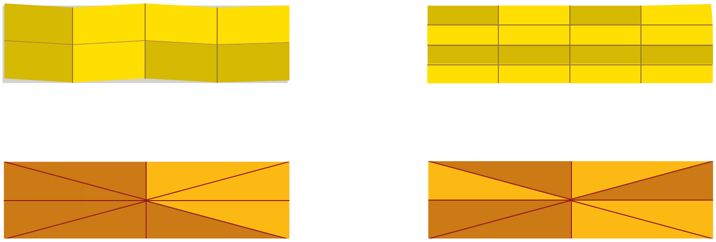
$\frac{1}{8}$ en



La actividad siguiente conviene realizarla en forma individual, para luego proponer que discutan lo producido en pequeños grupos y, finalmente, hacer la puesta en común con toda la clase.

Actividad 3

• Buscá, para cada caso, distintas expresiones fraccionarias que representen la parte sombreada y la parte sin sombrear.



Al desarrollar la secuencia, es conveniente que tengamos en cuenta que:[15]

- los alumnos alternen momentos de trabajo individual y grupal, y que realicen puestas en común con el grupo total;
- las consignas se pueden plantear en forma oral y, a la vez, escribir en la pizarra, variando la forma de referirnos a las fracciones (tres cuartos, tres de las cuatro partes, las tres cuartas partes, 3/4…);
- los alumnos pueden hacerse cargo de decidir y justificar la validez de las respuestas, ya sea en forma empírica (plegando, realizando las marcas efectivamente) o mediante argumentos, por ejemplo, cuando un niño dice: *Para sombrear los tres cuartos de un rectángulo, tendría que dividirlo en dos y volver a dividirlo por la mitad porque así formo cuartos, dos cuartos para cada mitad,* y no necesita hacerlo efectivamente para aceptarlo como cierto;
- las equivalencias y las diferentes relaciones que se van definiendo pueden registrarse en afiches y en la carpeta o en el cuaderno, a fin de ir conformando el repertorio numérico “tratado por la clase”.

Los debates que surjan a partir de estas actividades debieran permitir la formulación de algunas conclusiones y registros de expresiones numéricas, como las siguientes:

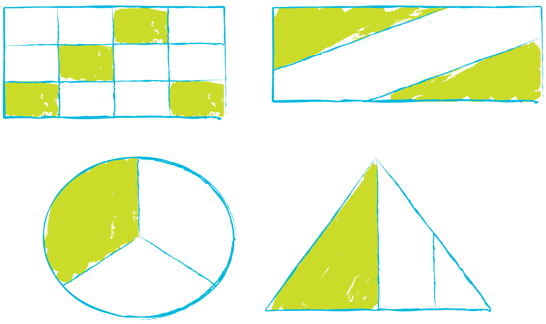
- *La mitad y la cuarta parte de un rectángulo pueden tener diferentes formas.*
- *Dos medios o cuatro cuartos es todo el rectángulo, porque sombreo todas las partes en las que está dividido.*

[15] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Construir condiciones para resolver problemas”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*.

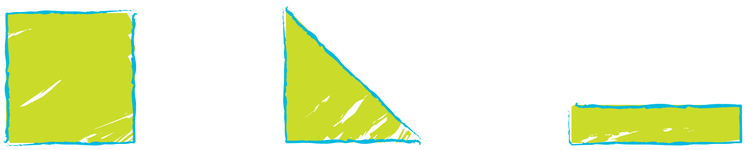
- *Si tomo una parte de dos, es un medio; si tomo dos partes de cuatro, también es un medio; si tomo la mitad de las partes en las que está dividido el rectángulo, es un medio; 1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 son diferentes formas de escribir la mitad.*
- *Cuantas más son las partes iguales en que se divide el rectángulo, las partes son más chicas.*
- *Una misma parte sombreada se puede expresar de diferentes maneras.*
- *Una fracción la puedo representar sombreando de diferentes maneras.*
- *La mitad de un medio es un cuarto, 1/2 de 1/2 es 1/4 y la mitad de un cuarto es un octavo, 1/2 de 1/4 es 1/8.*
- *Tres cuartos es lo mismo que un cuarto y un cuarto y un cuarto. 3/4 = 1/4 + + 1/4 + 1/4 y también es lo mismo que un medio y un cuarto 3/4 = 1/2 + 1/4.*

En muchos textos, se incluyen actividades como las siguientes, que pueden plantearse próximas al desarrollo de la secuencia anterior o separadas entre sí e intercaladas con problemas que aludan a otros significados de la fracción. Aquí, incluimos propuestas para decidir si las partes sombreadas corresponden a una fracción dada, variando la forma del entero, la división del mismo y cómo se sombrea; y reconstruir el entero a partir de una parte dada.

• En cada una de las siguientes figuras hay una parte sombreada. Indicá en cuáles la parte sombreada no representa $\frac{1}{3}$ del dibujo y explicá por qué.



• En cada una de estas figuras se representó $\frac{1}{4}$ de otra. Dibujá en cada caso la figura entera de dos maneras diferentes.



Para avanzar en la construcción del sentido de las fracciones, propondremos **problemas de reparto** que pueden ser abordados por los niños a partir de sus conocimientos de división con números naturales. Se trata, en este caso, de plantear problemas de división en los que tenga sentido pensar en seguir repartiendo el resto de la división entera.

¿Cuándo ocurre esto? El problema *repartir en partes iguales 6 chocolates entre 3 niños* encuentra solución en el conjunto de los números naturales, pero el problema *repartir 5 chocolates entre 3 chicos, usando la totalidad de los chocolates* exige dar entrada a otros números, distintos a los naturales, para expresar su solución.

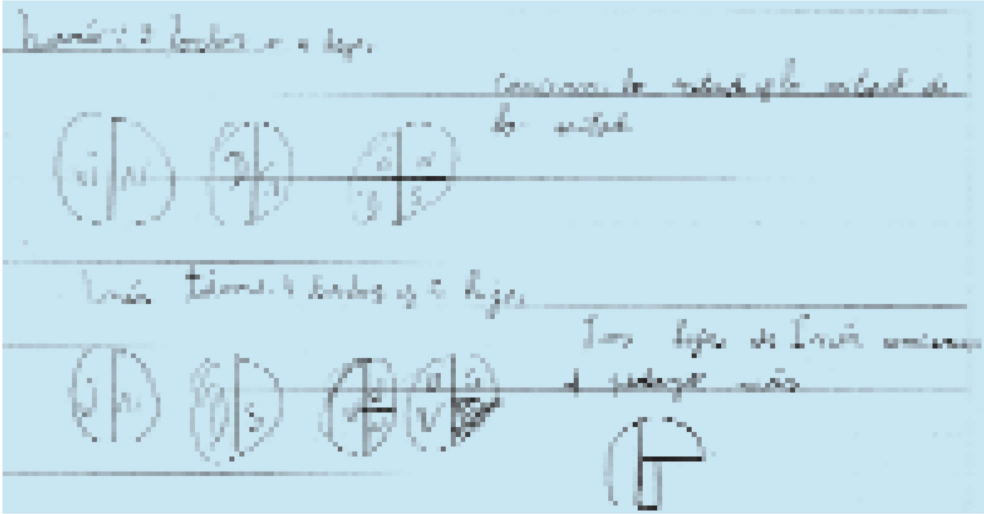
Estos problemas de reparto, que obligan a seguir repartiendo el resto de la división entera, dan lugar, en general, a una diversidad de procedimientos a partir de los cuales se generan buenas condiciones para abordar el trabajo con fracciones. Esta diversidad plantea de entrada la necesidad de discutir acerca de la noción de equivalencia de las "partes" y puede constituirse en punto de apoyo para abordar otras cuestiones: la relación entre el tamaño de cada parte y el número de las partes; la relación entre los enteros que se reparten y el número de destinatarios, etc. Más adelante, este trabajo será una referencia para comprender por qué la fracción a/b puede pensarse como el resultado del cociente entre el número a y el número b.

¿Cómo puede resolver un niño de 4º año/grado problemas de reparto?[16] Veamos cómo es posible abordar estos problemas en el aula y generar condiciones para que los alumnos avancen, a partir de ellos, en el estudio de las fracciones. Tomemos la siguiente situación: *María tiene tres tortas iguales para repartir entre sus cuatro hijos. Inés tiene cuatro tortas iguales a las de María para repartir entre sus cinco hijos. ¿Comen más los hijos de María o los de Inés?*

Verse en la situación de decidir quién come más permite a los alumnos tomar decisiones sobre las estrategias de reparto para determinar cuánto come cada uno de los hijos de María y cuánto come cada uno de los hijos de Inés.

Así (ejemplo 1):

[16] Las respuestas pertencen a alumnos de la docente Alcia Salicioni, de la Escuela Nº 133 de General Roca, 1991.

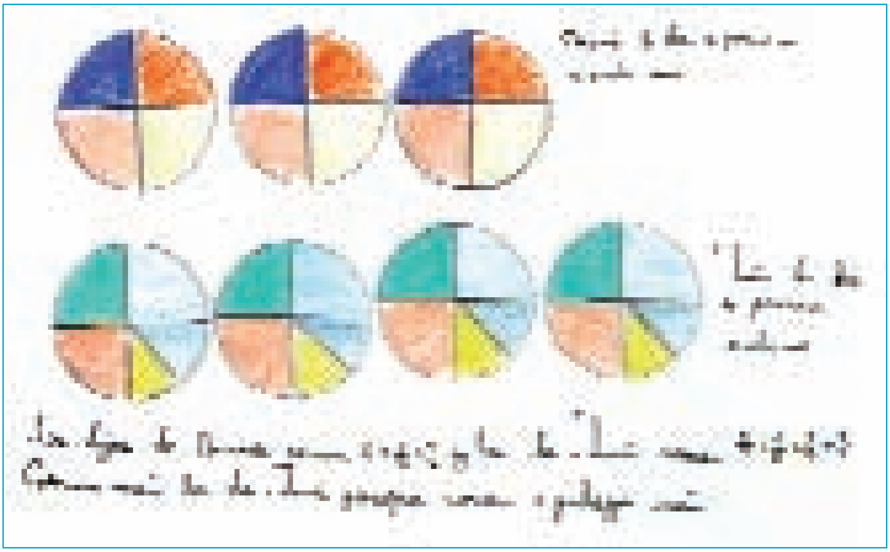


Ejemplo 1

Este alumno realiza dibujos a mano alzada, moviliza la idea de mitad que dispone y utiliza un procedimiento muy eficaz que le permite resolver correctamente el problema planteado.

Empieza a distribuir mitades y cuando estas se terminan, distribuye la mitad de la mitad y la última mitad de las tortas de Inés la corta en cinco trozos, sin conservar la igualdad entre los mismos. Tiene control total sobre el resultado de sus acciones: puede determinar cuánto come cada uno y quién come más, aun cuando solo exprese en términos de “pedazo” la diferencia entre lo que comen los hijos de María e Inés.

A nivel de la representación escrita no registra ningún tipo de escritura fraccionaria y las cantidades solo están expresadas en palabras. Pareciera que no es posible encontrar vínculos entre este problema y otros anteriores o quizás se trate de un alumno que no tuvo la oportunidad de frecuentar en la escuela los medios, los cuartos, etcétera. En cambio (ejemplo 2):

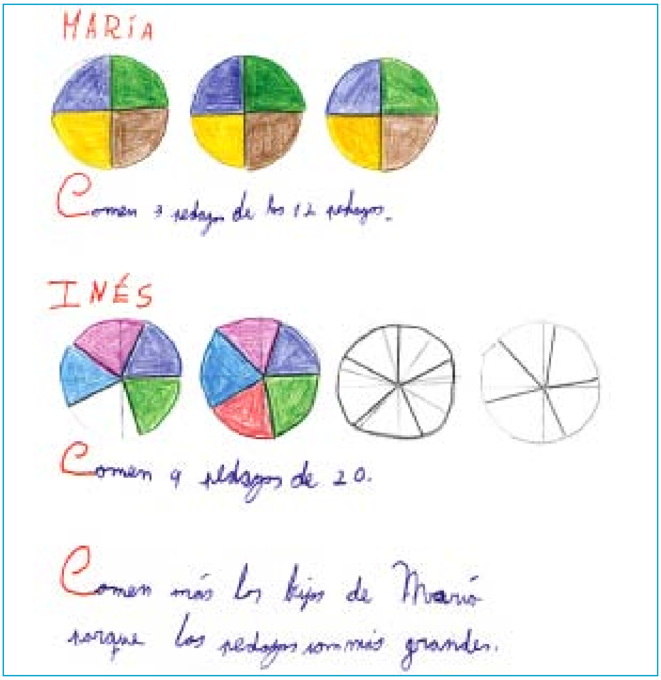


Ejemplo 2

A diferencia del procedimiento anterior, este alumno, cuando reparte, quiere obtener trozos del mismo tipo, es decir *si María tiene 4 hijos, cada torta se parte en 4 y si Inés tiene 5 hijos, cada torta se divide en 5.* Lo que sucede es que dividir en cuatro una torta circular atendiendo al modelo cotidiano de “partir tortas” es fácil, pero hacerlo en cinco no: ya no vale trazar los diámetros o pensar en dividir en dos sucesivamente. En consecuencia, a veces se pierde la equivalencia de las partes.[17]

De hecho, esta representación no muestra todos los quintos con el mismo tamaño, y es probable que la respuesta del niño se haya apoyado sobre la medida visiblemente igual de los 1/4 y de los 1/5 para responder *los hijos de Inés comen más, porque tienen un pedazo más.*

O bien, así (ejemplo 3):

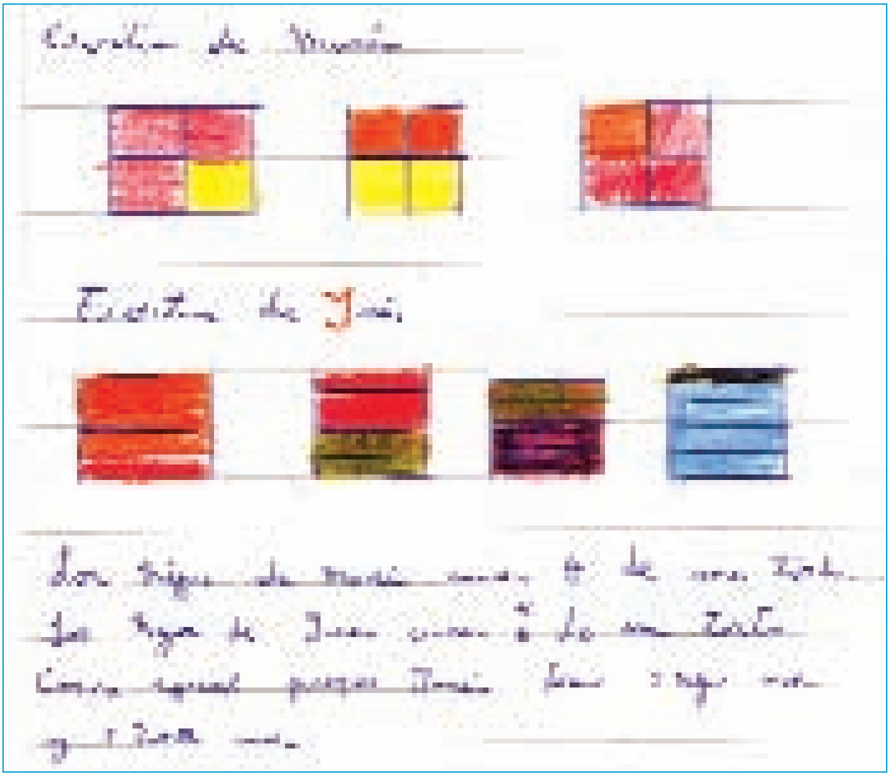


Ejemplo 3

[17] **Recomendación de lectura:** un análisis sobre las producciones de los chicos puede leerse en Panizza, M. (1997), “Aproximación al análisis del error desde una concepción constructivista del aprendizaje”, en Bressan, A. y otros, *Los CBC y la enseñanza de la Matemática*, Buenos Aires, AZ.

Este alumno, a diferencia del anterior, controla la equivalencia entre los trozos del mismo tipo, es decir todos los 1/5 son iguales. La respuesta de cuánto come cada uno vincula la cantidad de trozos que se le asigna a cada niño en comparación con el total de trozos obtenidos (la escritura respectiva sería, en el primer caso, 3/12 y, en el segundo, 4/20) y la respuesta a la comparación planteada solo puede darse en términos del tamaño de las porciones.

O bien, así (ejemplo 4):



Ejemplo 4

Este procedimiento salva la dificultad de la división en cinco, adoptando un modelo de partición poco frecuente en la vida cotidiana, pero que revela implícitamente la necesidad de obtener "trozos iguales". A diferencia del anterior, refleja la cantidad que cada niño come en conjunto de partes adyacentes y no como una reunión de partes de cada entero. Dicho de otro modo: en el ejemplo anterior el 3/4 surge de la suma de 3 veces 1/4, en cambio en este caso esa suma se ubica en el entero y el 3/4 es posible pensarlo como la relación entre la torta y una parte de la misma.

Este conocimiento, sin embargo, se revela insuficiente para abordar el problema de la comparación. Este alumno pudo expresar que los hijos de María comen 3/4 de la torta y que los de Inés comen 4/5 de la misma torta, pero estas expresiones no dan suficiente información a la hora de decidir qué cantidad es más grande. Este alumno puede haber vislumbrado que la cantidad depende del número de trozos, pero también del tamaño de los mismos (imposible de controlar con la representación usada), o bien se puede haber detenido en la escritura 3/4 y 4/5 y hacer explícita la diferencia de 1 unidad entre los numeradores y denominadores y afirmar: *entonces son iguales,* y agregar: *comen lo mismo porque María tiene una torta más, pero también 1 hijo más.* Cabe aclarar aquí que una idea errónea frecuente que suelen utilizar los niños para determinar si dos fracciones son equivalentes es pensar que *dos fracciones son equivalentes cuando la diferencia entre los numeradores y entre los denominadores es la misma.*

¿Cómo trabajar con estas producciones de los alumnos? Tal como se expresa en el apartado *Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo*, una de las funciones sustantivas del docente es establecer y estimular la interacción entre los niños, favorecer los intercambios, las discusiones, ordenar la participación de los alumnos y organizar las puestas en común[18]. En las instancias de puesta en común, los maestros somos los responsables de discutir con los alumnos el producto de su trabajo, de ayudar a pensar colectivamente sobre lo producido, de plantear preguntas, formular regularidades, de enunciar acuerdos y los nuevos saberes de la clase.[19]

Concretamente, la puesta en común de los procedimientos anteriores debiera ser la oportunidad para promover el debate sobre:

- las representaciones utilizadas (forma circular, cuadrada de las tortas) en relación con las ventajas y dificultades derivadas para “cortar” en trozos y también para comparar las cantidades de lo que come cada hijo;
- las escrituras producidas a partir de la pregunta *¿Cuánto come cada niño?* y la relación de las mismas con la representación que la generó. La confrontación de las respuestas debiera dar la posibilidad de establecer la equivalencia entre 1/2 +1/4 y 3/4; y entre 1/4 + 1/4 + 1/4 y 3/4. Estas equivalencias pueden quedar registradas en las carpetas o en los cuadernos y en un afiche colectivo en el que se irá agregando información a medida que se obtengan otras equivalencias;
- las estrategias utilizadas para comparar qué hijo come más: la variedad de respuestas contradictorias dadas al problema constituyen una excelente posibilidad

[18] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “La gestión de la clase”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*.

[19] **Recomendación de lectura:** para ampliar, véase Quaranta, M. y Wollman, S. (2003), “Discusiones en la clase de Matemática: qué, para qué y cómo se discute” en Panizza, M. (comp.), *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*, Buenos Aires, Paidós.

para discutir sobre el procedimiento más fiable. Los alumnos pueden tomar conciencia de que algunas respuestas sólo atienden al número de trozos sin considerar el tamaño de cada uno; que otras atienden al tamaño de cada trozo sin considerar el número de trozos; y que algunos piensan que da lo mismo aumentar una torta y un niño. Las discusiones que se generan a partir de estos análisis permiten avanzar en la idea de que *si tuviésemos todos trozos del mismo tamaño, la comparación es muy fácil, porque alcanza con determinar de cuántos trozos se trata.*

Al presentar problemas que involucran tanto particiones como repartos es necesario tener en cuenta los números que se eligen y las representaciones que se ponen en juego.

En relación con los números, los primeros problemas de partición analizados ponen en funcionamiento fracciones menores que 1. También es importante considerar que en los problemas de reparto haya menos elementos que repartir que chicos y más elementos a repartir que chicos. En este último caso, aparecen las fracciones mayores que la unidad y las escrituras mixtas asociadas, se generan otros números ampliando el repertorio, sin que esto resulte más complejo para los alumnos.

Con respecto a las representaciones[20], sabemos, y además lo hemos visto en los procedimientos de los alumnos, la dificultad que conlleva partir un círculo en 5 partes o en 3 partes. Los manuales escolares evitan estas dificultades dibujando los enteros ya fraccionados en el número de partes necesario y, además, usan enteros rectangulares donde las particiones son, en general, menos complejas.

La idea no es evitar la dificultad, sino generar condiciones para que los niños puedan superarla. Por esta razón, consideramos que los problemas anteriores permiten un buen trabajo con representaciones gráficas.

En el caso de particiones de círculos, podemos estimular el uso de fósforos o palitos a modo de radios que, moviéndolos, permiten encontrar las divisiones necesarias para tener tal número de partes iguales y luego proceder a su marcado.

En este punto, al igual que el planteo de los problemas de plegado, es posible discutir sobre el número de cortes necesario para partir en “tantos” trozos, en función de la forma del entero y de la cantidad de trozos que se desean obtener.

Un tercer grupo de problemas que también permite avanzar en la construcción del sentido de las fracciones son los **problemas de medición.** El estudio de los racionales y el de la medida están íntimamente relacionados, pero a la hora de planificar su enseñanza es necesario tener en cuenta dónde ponemos el énfasis.

---

[20] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Las representaciones”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno.*

En el caso del estudio de los racionales, podemos proponer situaciones en las que sea necesario medir, eligiendo muy cuidadosamente las situaciones para que el número que cuantifica la correspondencia entre unidad y objeto a medir no sea un entero. También habrá que expresar dicha cantidad, interpretar otras expresiones, comparar, ordenar, sumar o restar cantidades expresadas con fracciones.

Estos problemas de medidas permiten mostrar un funcionamiento del concepto de fracción diferente del que se pone en juego en los problemas de reparto, lo que permite articular el Eje "Número y Operaciones" con el de "Geometría y Medida". La complejidad de la tarea será función de la relación entre la unidad de medida y el objeto a medir y, al proponer distintos casos, los niños tendrán la oportunidad de ampliar el repertorio de fracciones que utilizan, de atribuir sentido a ciertas operaciones entre fracciones y de elaborar para las mismas algunas estrategias de cálculo convenientes.

Analizando el alcance que estos problemas podrían permitir en 4º año/grado hemos decidido tratarlos a este nivel recién en 5º año/grado. De todas maneras, cuando en 4º año/grado abordemos, en el Eje "Geometría y Medida", los problemas de medición de longitud, peso, etc., buscaremos que las medidas impliquen escrituras fraccionarias y que exijan construir equivalencias, compararlas, sumarlas, multiplicarlas y dividirlas por un entero.

Plantear situaciones para medir, repartir o partir usando expresiones decimales

El SIMELA y el Sistema Monetario constituyen soportes interesantes sobre los cuales pensar cuestiones ligadas a la organización de la notación decimal. Sin embargo, es importante tener en cuenta que estos contextos no son suficientes para abordar las características de los números racionales.

Como ejemplo de algunas de las limitaciones de estos contextos, podemos pensar en el Sistema Monetario, cuya unidad es el peso y el submúltiplo más pequeño, el centavo. En este sistema, la escritura de un precio expresado en pesos admite sólo dos lugares después de la coma y ese precio se puede expresar en centavos sin escribir la coma. Además, entre dos precios dados hay un número finito de precios posibles, lo que no ocurre entre dos expresiones decimales cualesquiera. Por ello, a medida que se avance en los años/grados posteriores en el estudio de los decimales, es importante desprenderse de los sistemas de medidas para poder reflexionar sobre las cuestiones relativas al orden y a la densidad.

Con estos alertas proponemos, para este 4º año/grado de la escolaridad obligatoria, tomar como punto de partida para la enseñanza de los decimales el contexto del dinero, pues presenta la ventaja de recuperar prácticas sociales extraescolares de mucha familiaridad para los alumnos[21], como el conocimiento del valor de las diferentes monedas y sus equivalencias.

Con respecto a la notación decimal, para los niños no es evidente que en las posiciones a la derecha de la coma se conservan las relaciones de 1 a 10 analizadas al estudiar la escritura de números naturales en el sistema decimal. Esta relación, cuando se la analiza a nivel de escritura (diez unidades de un orden equivalen a una unidad del orden que se escribe a la izquierda), funciona de la misma manera que con los números naturales, pero con las "palabras" que designan esas relaciones no sucede lo mismo: mientras que diez decenas forman una centena, diez centésimos forman un décimo, es decir, mientras que las centenas son unidades de mayor orden que las decenas, los centésimos son unidades de menor orden que los décimos.

Secuencia para escribir cantidades de dinero usando decimales: "Pesos y centavos"[22]

El conjunto de problemas de esta secuencia permite que los chicos se inicien en la construcción del sentido de los números racionales expresados en su forma decimal. Al resolver estos problemas, los alumnos tienen que formar cantidades de dinero usando monedas de determinada clase y escribir expresiones equivalentes entre esas cantidades, a la vez que se inician en el análisis de la información contenida en la notación decimal.

Problema 1

- Con monedas de los siguientes valores $1; 50 centavos; 25 centavos; 10 centavos; 5 centavos y 1 centavos escribí tres maneras de pagar $ 3,75 (se pueden usar varias monedas del mismo valor).

- Anotá dos o tres maneras diferentes de formar $ 0,87 y $ 2,08.

---

[21] **Recomendación de lectura:** acerca de la importancia de establecer "puentes" en el aula entre los conocimientos informales de los niños y los conocimientos que la escuela intenta enseñar, véase Ferreiro, E. (1986), "El cálculo escolar y el cálculo con dinero en situación inflacionaria", en *Proceso de alfabetización. La alfabetización en proceso*, Buenos Aires, Centro Editor de América Latina. Carraher, T.; Carraher, D. y Schliemann, A. (1991), *En la vida diez, en la escuela cero*, México, Siglo XXI.

[22] Los problemas fueron extraídos de "Acerca de los números decimales. Una secuencia posible", en el documento *Aportes para el Desarrollo Curricular. Matemática*, GCBA, 2001.

Para resolver este problema, los niños realizan composiciones y descomposiciones de cada cantidad de dinero, utilizando diferentes monedas y estableciendo relaciones de equivalencias entre ellas: *un peso es lo mismo que dos de 50 centavo o que 4 de 25 centavo.* Y al registrar los resultados, producen escrituras y cálculos diversos[23], que pueden controlar por el manejo que tienen del dinero.

Nuestras intervenciones no deben apuntar a encontrar "todas" las composiciones posibles, sino a enfatizar aquellos procedimientos en los que se realizan transformaciones, como *en vez de usar 3 monedas de 25, uso una de 50 y una de 25,* explicitando así algunas equivalencias que sean útiles para no volver a sumar todas las monedas.

Un error bastante frecuente es que para formar 2,08 algunos alumnos sugieran hacerlo a partir de dos monedas de 1 peso y ocho de 10 centavos. Una posible intervención, que podría entrar en diálogo con lo realizado y posibilitaría que los niños revisen la primera solución, consiste en preguntarles *¿Cómo harían para obtener $ 2,80?* Si, en cambio, este error no apareciera, podríamos plantear: *Juan armó 2,08 con dos monedas de dos pesos y ocho de 10 centavos y Marcos con dos monedas de dos pesos y ocho de 1 centavo. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?*

De esta manera, los niños comienzan a establecer relaciones entre la posición de cada cifra en la escritura y la cantidad de monedas de cada tipo (10 c o 1 c), que son necesarias para componer la cantidad, avanzando en el análisis del valor posicional. Si bien es posible que no usen aún las denominaciones décimos y centésimos, que podrán introducirse oportunamente, hacen un uso implícito de las relaciones entre las unidades de distinto orden.

Problema 2

• Si recibís un premio de 15 monedas de 10 centavos, 7 monedas de 25 centavos y 13 monedas de 50 centavos, ¿cuánto dinero recibiste?

• Un chico recibió un premio con las siguientes monedas: 12 monedas de 10 centavos, 2 monedas de 1 peso, 8 monedas de 1 centavo y tres de 25 centavos. Para saber cuánto había ganado, hizo cálculos con la calculadora y obtuvo el siguiente resultado: 4,03. Si sabemos que el resultado es correcto, ¿qué cálculos pudo haber hecho para obtener en el visor de la calculadora ese número? Anotalos y verificalos con tu calculadora.

[23] **Recomendación de lectura:** en la página 22 de "Acerca de los números decimales. Una secuencia posible", en el documento *Aportes para el Desarrollo Curricular. Matemática*, GCBA, 2001, se pueden encontrar posibles procedimientos de los alumnos con el correspondiente análisis.

Al resolver la primera parte de este problema, los niños pueden hacer el cálculo del dinero utilizando variadas escrituras y no necesitan hacer uso de los números con coma, porque pueden calcular todo en centavos. Es necesario, entonces, comparar las distintas notaciones y las respuestas *975, 975 centavos, 9 pesos con 75 centavos y hasta 9,75,* haciendo hincapié en las equivalencias entre ellas.

Las condiciones impuestas en la segunda parte del problema (obtener por resultado 4,03 en la calculadora) hacen que los niños modifiquen los procedimientos eficaces hasta ahora y utilicen notaciones convencionales. Para que *aparezca 4,03 en el visor de la calculadora* no es posible transformar todos los valores a centavos y luego sumar, sino que es necesario expresar las cantidades con números con coma, por ejemplo: *12 monedas de 10 c es lo mismo que 120 c, pero en la calculadora escribo 1,20.* Por eso, se puede afirmar que esta parte del problema exige a los niños que expresen en pesos las cantidades indicadas.

Es importante discutir con el conjunto de la clase las diferentes propuestas de los alumnos. Preguntas como, por ejemplo, *¿Cómo se escribe en la calculadora 1 centavo? ¿Y 10 centavos? ¿Cómo se escribe doce veces 10 centavos en la calculadora? ¿Y ocho veces 1 centavo? Si suman todo en centavos, ¿cómo anotan los pesos? ¿Cómo se anota un peso en centavos? ¿Cómo se hace para escribir 403 centavos como 4,03 pesos? ¿Pudieron hacer todas las cuentas seguidas en la calculadora? ¿Tuvieron que anotar resultados parciales en una hoja?* permitirán generar buenos debates a partir de las dificultades encontradas.

Consideremos ahora un nuevo problema:

Problema 3

• Si sólo tuvieras monedas de 10 centavos, ¿cuántas necesitarías para pagar justo estas cantidades?

a) $ 1 b) $ 0,80 c) $ 2,20 d) $ 12,50 e) $ 4,25 f) $ 4,03 g) $ 0,05

El objetivo de este problema es profundizar el análisis de la escritura decimal, intentando que los alumnos encuentren y expliciten la relación entre la escritura y la cantidad de monedas de diez centavos que la misma tiene.

Expresiones como *para $ 4,25 son cuarenta y dos de 10 centavos y sobran 5 centavos* o *Hay cuarenta monedas en el 4 y dos más en el 2 y sobran 5 centavos* o *Yo le saco el último número* muestran las diferentes formas que tienen los chicos de pensar este problema.

Si no apareciera ninguna resolución en la que el niño no considera la coma ni la cifra de los centésimos, podríamos intervenir preguntando por qué funciona la regla y si vale para todas las cantidades, por ejemplo: *Algunos chicos dicen que mirando el número te das cuenta de qué cantidad de monedas de 10 necesitás. ¿Ustedes qué piensan?*

Problema 4

Se quiere repartir $ 1 entre diez chicos, de manera que todos reciban la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
¿Y si se quisieran repartir $ 2 entre diez? ¿Y si fuesen $ 5 entre diez? ¿Y $ 2,5?
¿Cuánto le tocaría a cada uno de los diez chicos si fuesen $ 0,80?
¿Y si fuesen $0,10?

Para realizar el reparto, los niños usan equivalencias que pueden establecer por su experiencia con el dinero, como que 10 centavos es la décima parte de 1 peso, aunque a veces no sepan cómo nombrarlo en términos de fracciones de la unidad.

A través de nuestra intervención, introduciremos cierta información respecto a que *1/10 de peso se escribe 0,1 o 0,10 y que ese primer lugar después de la coma representa los décimos de peso. También que 1/100 de peso se escribe 0,01 y que ese segundo lugar después de la coma representa los centésimos de peso,* y registrar:

10 centavos = $ 0,10 = $ 1/10   **1 c = $ 0,01 = $ 1/100**

Este registro puede funcionar como "memoria escrita" y podrá ser consultado al resolver nuevos problemas por aquellos alumnos que lo consideren necesario.

Los problemas hasta aquí propuestos permiten que los alumnos se vayan dando una idea del uso de expresiones decimales para representar cantidades en el contexto del dinero y favorecen la producción e interpretación de formas diferentes y equivalentes de expresar estas cantidades. Las conclusiones que se registren en carteles y/o en las carpetas o cuadernos se convertirán en puntos de apoyo para abordar el uso de expresiones decimales en nuevos contextos, y avanzar en el análisis de estas escrituras, independizándose del trabajo con cantidades. En el trabajo desplegado a propósito de los distintos contextos, los niños usarán expresiones tales como *centímetros, centavos, décima parte del peso,* etc. Oportunamente, se podrá sistematizar que tanto a la derecha como a la izquierda de la coma, el valor de cada cifra depende de la posición que ocupa.

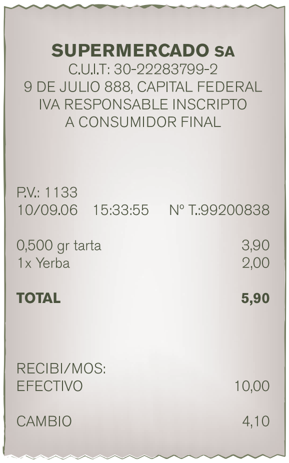
A continuación presentamos otras propuestas para poner en juego los conocimientos trabajados:

• ¿Cuál de los siguientes chicos tiene el dinero exacto para pagar los $ 3, 60 que cuesta la cartuchera? Expresá con un número cuánto dinero tiene cada uno.

• En una esquina hay una heladería con el siguiente cartel:

a) ¿Qué compró María si pagó con 3 monedas de 50 centavos?
b) ¿Qué monedas pudo haber entregado Mario si compró 1 cucurucho y entregó 8 monedas?
c) ¿Pudo comprar Martín el cucurucho con 8 monedas iguales?
d) Indicá con qué dinero pudo haber pagado Daniel, si compró 1 kg de helado y entregó 1 billete y monedas.

• Indicá en cuáles de los siguientes casos es posible tachar ceros sin que cambie el número.



El último problema puede dar lugar a una discusión interesante sobre qué pasa con los ceros en las expresiones decimales, ya que en algunos casos, si los omitimos, no varía el número y en otros sí.

Por el manejo que tienen los niños de los números naturales, pueden explicitar que en el caso de la rifa *los ceros que están a la izquierda no valen y los ceros que están entre dígitos diferentes de 0, o que están a la derecha de otros, no se pueden sacar porque el número cambia*. En el caso del dinero, los chicos podrán afirmar, por ejemplo, que *los ceros que están a la izquierda no valen, pero no podemos tachar el que está justo antes de la coma, o bien los ceros que no valen son los que están a la derecha del número, después de la coma.*

Plantear situaciones para comparar cantidades y números expresados en forma fraccionaria y decimal

Los problemas que se han planteado, a propósito del uso de expresiones fraccionarias o decimales para expresar cantidades obtenidas como producto de particiones, repartos o mediciones, permiten muchas veces plantear la comparación de dichas cantidades. Es más, al analizar el caso de los “problemas de reparto”, se incluyó una situación en la que la se requiere expresar cantidades para compararlas (el resultado del reparto de las tortas entre los hijos de Inés y de María).

Retomando el contexto de plegado de rectángulos, y luego de la secuencia propuesta o evocando ese trabajo, es posible plantear los siguientes problemas:

• Juan sombreó un cuarto de un rectángulo. Pedro sombreó los dos cuartos del rectángulo. Matías sombreó la mitad del rectángulo. Sofía sombreó la mitad del rectángulo y la mitad de la otra mitad. María sombreó la mitad de la mitad. Decidí: ¿Quiénes sombrearon la misma cantidad? ¿Quién sombreó más? ¿Quién sombreó menos?

• En el cumpleaños de Juan había una torta rectangular. En el cumpleaños de Paula también. En los dos casos, cada torta estaba dividida en ocho porciones iguales. Juan y Paula discuten:
Juan dice: *vos, en mi cumpleaños, comiste 1 porción de torta y yo, en tu cumpleaños, comí una porción de la torta, así que comimos lo mismo.*
Paula dice que no, que es verdad que cada uno comió una porción, pero que Juan comió más torta. ¿Quién tendrá razón?

Lo interesante del segundo problema es la necesaria referencia al "todo" para poder comparar estas cantidades. Juan tiene razón si se trata de tortas iguales y Paula también la tiene si la torta de Juan es más grande que la de ella. Es decir, no se puede decir quién tiene razón si no se sabe qué relación guardan las tortas entre sí. Ninguno de los problemas anteriores había requerido este tipo de análisis y la necesidad de tomar "todos" iguales como exigencia para la comparación.

Los contextos de medida también resultan propicios para presentar problemas que requieran de la comparación de decimales.

• En el colegio se hizo una competencia de "Salto en largo".

a) Indicá quién realizó el salto más largo y explicá por qué.
b) Matías dice que saltó más que Nico y menos que Gabi. ¿Cuánto puede medir su salto?
c) Esteban hace una planilla con los valores usando números con coma.

Completá la planilla y luego indicá en qué puesto salió cada uno.

Nico	Gabi	Pablo	Matías
Salto			

d) Claudio quedó descalificado de la competencia por pisar la línea. Él sostiene que saltó $1\frac{1}{4}$ m. ¿Qué puesto hubiese obtenido?

Como puede observarse, para resolver este problema los niños tendrán no sólo que escribir números decimales y establecer relaciones con números fraccionarios, sino también compararlos, intercalarlos y ordenarlos. El trabajo con contextos de medida permite, eventualmente, apoyarse en expresiones equivalentes para una misma cantidad con el fin de comprobar la validez de las respuestas. Por ejemplo, 1 m 3 cm = 103 cm y 1 m 30 cm = 130 cm. Cabe aclarar que la respuesta a la pregunta d) puede variar en función del valor que se haya elegido para el salto de Matías.

En este sentido, para avanzar en criterios más generales que permitan comparar números expresados de forma decimal o fraccionaria habrá que presentar problemas que no refieran a cantidades. Por ejemplo:

• Ordená las siguientes fracciones de menor a mayor.

$\frac{3}{3}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{3}{4}$

Justificá por qué ordenaste de ese modo.

• ¿Cuál es mayor? $\frac{3}{8}$ o $\frac{1}{8}$ $\frac{5}{3}$ o $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{6}$ o $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{10}$ o $\frac{4}{5}$

Seguramente la “evocación” de los contextos trabajados permitirá que los alumnos puedan, en el primer caso, pensar en el reparto de tortas, en las cantidades que expresan una torta, más de una, más de tres, menos que una... y, si hace falta, se propondrá realizar gráficos para tomar decisiones.

A veces, aparecen dificultades para establecer el orden total, porque los alumnos van tomando parejas de fracciones y escribiendo lo que resulta de esa comparación parcial.

Las fracciones elegidas para comparar en el segundo ejemplo: dos de igual denominador, una mayor que 1 y otra menor; dos menores que uno, pero una de ellas equivalente a 1/2 favorecen argumentaciones como las siguientes:

- *3/8 es más grande que 1/8, porque dividí la unidad en la misma cantidad de partes, y tomar 3 es más grande que tomar una de esas partes;*
- *5/3 es más grande que 3/5, porque 5/3 es más grande que 1 y 3/5 es más chico que uno;*

- *3/6 es más chico que 3/4, porque si divido en seis, las partes son más chiquitas que si divido en cuartos y en los dos casos estoy tomando 3. O también 3/6 es equivalente a 1/2 y es más chica que 3/4;*
- *4/5 es mayor que 3/10, porque si divido en 10, las partes son mucho más chicas que si divido en 5 y si tomo tres de las más chicas es menos que si tomo 4 de las más grandes.*

Eligiendo adecuadamente los números puestos en juego y discutiendo los argumentos usados en la comparación, pueden establecerse criterios generales que se podrán aceptar como válidos y que no será necesario justificar en futuras comparaciones. Para que los niños puedan establecer algunas generalizaciones[24], necesitamos intervenir específicamente en ese sentido. En algún caso, podemos plantear nuevos ejemplos para ver si los niños usan espontáneamente los mismos argumentos, en otros podremos plantear que exploren una "familia" de casos similares o analizar un contraejemplo. Por ejemplo:

> • Ayelén ya dijo por qué $\frac{3}{8}$ es mayor que $\frac{1}{8}$, ¿su idea sirve para decidir si $\frac{1}{9}$ es mayor o menor que $\frac{4}{9}$? ¿Y para comparar $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{7}$? ¿En qué casos sirve su razonamiento?
>
> • Jimena dijo que $\frac{3}{6}$ es más chico que $\frac{3}{4}$, porque si divide en seis, las partes son más chiquitas. ¿Siempre pasa que si las partes son más chiquitas la fracción es más chica?

Las conclusiones pueden registrarse haciendo anotaciones en las carpetas o en los cuadernos y en carteleras.

En las discusiones acerca de las comparaciones, es frecuente que los niños utilicen expresiones como *el de arriba es menor que el de abajo*. Esta es, entonces, una buena ocasión para identificar los componentes de la escritura fraccionaria (numerador y denominador), pues en la enunciación de esas generalizaciones se torna necesario hablar de ellos. Por ejemplo:

- *Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es más grande la que tiene numerador mayor.*
- *Para comparar algunas fracciones, a veces es útil comparar con el entero.*
- *Si las fracciones tienen igual numerador, me fijo en el denominador.*

[24] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Las situaciones de enseñanza" en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

Así, los nombres cobran sentido para mejorar la comunicación y permiten volver sobre denominaciones que son, en general, poco significativas cuando se presentan junto a las primeras aproximaciones a la escritura fraccionaria.

Si se trata de la comparación de expresiones decimales, los planteos pueden ser:

• ¿Cuál es mayor?
1,25 o 1,5 0,75 o 1,05 0,75 o 0,25 2,25 o 2,05
Explicá por qué en cada caso.

• Ordená de mayor a menor los siguientes números y justificá:
1,5 2,25 0,75 2,5 1,05

Los niños suelen tratar las escrituras con coma como si fuesen números naturales, especialmente si las toman fuera del contexto en el que surgieron y, en consecuencia, hacen extensivas a la comparación de decimales las reglas de comparación de números naturales. Por ejemplo, los niños pueden argumentar: *Parece que 1,25 es más grande que 1,5, porque tiene más números; pero en realidad es menor, porque cuando tengo $ 1,25 tengo menos que cuando tengo $ 1,50.*

En esta argumentación convive una estrategia de comparación que sirve para los naturales (el de más cifras es mayor) con otra referida al valor de las cifras. Entonces es oportuno que los niños reflexionen acerca de las relaciones que es posible establecer entre los decimales cuando se comparan, y al hacerlo designar los elementos (parte entera, parte decimal) de una escritura con coma. En tal sentido, algunas conclusiones podrían ser:

- *No siempre el número que tiene más cifras es el mayor.*
- *Si hay que comparar dos decimales de distinta parte entera es mayor el de mayor parte entera.*
- *Si tengo que comparar dos decimales de igual parte entera, me fijo en el número que está después de la coma, que es el que "manda".*

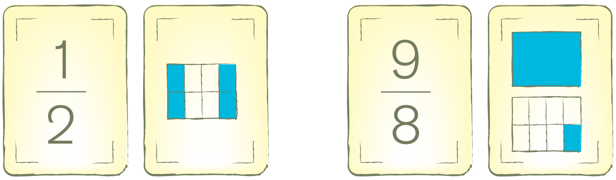
Este trabajo de comparación de expresiones fraccionarias o decimales puede ampliarse incluyendo algunos juegos colectivos que, a la vez que aportan problemas en otro contexto, favorecen la memorización de ciertos resultados y la disponibilidad de estrategias que serán útiles para abordar el cálculo.[25]

[25] **Recomendación de lectura:** se pueden consultar otras propuestas de juegos en Fuenlabrada, I. y otros (2000), *Juega y aprende matemática*. Buenos Aires, Novedades Educativas.

"Gana el que tiene más": comparar y establecer equivalencias entre fracciones.
Materiales: cada grupo debe tener un dado en cuyas caras se pegan etiquetas para escribir números como los siguientes: 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{4}$. Recortes de papel equivalentes a las siguientes fracciones: 4 de $\frac{1}{2}$, 8 de $\frac{1}{4}$ y 16 de $\frac{1}{8}$.[26]
Organización de la clase: se forman grupos de 4 alumnos.
Desarrollo: cada uno de los cuatro jugadores debe tirar, por turno, el dado y tomar de la mesa el recorte correspondiente. En los casos que lo considere necesario, podrá hacer canjes de recortes. Al cabo de tres vueltas, gana el que tiene la cantidad mayor.

En algunos casos, los chicos tendrán que levantar más de una pieza para conseguir el valor obtenido (3/4 = 1/2 + 1/4, o bien 3 de 1/4). Para facilitar la comparación al final del juego, si bien es posible hacer comparaciones parciales, es natural que se busque expresar el total obtenido. Para hacerlo, es posible realizar canjes entre piezas para "armar" enteros, por ejemplo con 1/2, 1/8 y 3/4, se puede canjear 1/2 por dos de 1/4 y formar un entero, o también usar escrituras numéricas y expresar lo obtenido con un solo número.

"Mini casita robada con fracciones": comparar fracciones
Materiales: cada grupo debe tener un mazo formado por 28 cartas como las siguientes:



La composición del mazo de cartas dependerá del repertorio de fracciones que se esté trabajando. La repetición de algunas cartas se hace necesaria únicamente para lograr que el mazo contenga 28 cartas. Una posibilidad es incluir las cartas de medios, cuartos y octavos: 1 - 1/2 - 2/2 - 3/2 - 1/4 - 2/4 - 3/4 - 4/4 - 5/4 - 6/4 - 1/8 - 2/8 - 3/8 - 4/8 - 5/8 - 6/8 - 7/8 - 8/8 - 9/8 - 10/8 - 1 1/2, - 1 1/2 - 1 2/4 - 1 1/8 - 1 2/8 - 2 - 1 - 1/2.

[26] También se puede utilizar el material recortable para alumnos "Partes del círculo", en *Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender,* Subsecretaría de Educación Básica, Ministerio de Educación. En la pág. 9 del material para docentes, se encontrarán otras propuestas que permiten trabajar en el mismo sentido.

Otra posibilidad sería poner medios, tercios y sextos.[27]
Organización de la clase: se forman grupos de 3 ó 4 alumnos.
Desarrollo: se colocan, en el centro de la mesa, cuatro cartas separadas y el resto del mazo formando una pila. Todas las cartas deben tener la representación numérica hacia arriba. En su turno, cada jugador saca la primera carta de la pila y puede levantar una carta de la mesa con la condición de que esta última sea igual o menor que la carta que sacó de la pila. Si no encuentra ninguna carta menor, dejará su carta sobre la mesa. Cuando se acaban las cartas de la pila, gana el jugador que obtuvo más cartas. Si algún jugador duda, puede dar vuelta las cartas y usar la comparación de los cuadrados pintados en el reverso.

Después de jugar, podemos volver sobre el trabajo de comparación de fracciones descontextualizado, ya que es posible que los alumnos se apoyen en lo realizado para proponer estrategias de resolución o justificar la veracidad de las comparaciones realizadas. Este trabajo promoverá que las estrategias de comparación se vuelvan cada vez más disponibles, o sea ya no se discutan, sino que son aceptadas como válidas y seguras.

Para avanzar en el uso de las operaciones con números naturales al resolver problemas

Durante el Primer Ciclo, las operaciones básicas con números naturales fueron ganando sentido para los chicos al resolver problemas tanto del campo aditivo (con sumas y restas) como del campo multiplicativo (con multiplicaciones y divisiones). En esos problemas, las operaciones habrán tenido diferentes significados y, al resolverlos, habrán discutido diferentes formas de hacer los cálculos.

En 4º año/grado, continuaremos trabajando con estas operaciones hacia la ampliación de sus significados. Con respecto a los problemas del campo aditivo, agregaremos un nuevo significado: la composición de dos transformaciones de la cantidad de elementos de una colección. En el caso de los problemas del campo multiplicativo, además de contemplar el estudio del resto en los problemas de división, incluiremos el estudio de las relaciones de proporcionalidad.

---

[27] Estas cartas están disponibles en el material recortable para alumnos "Cartas con fracciones", en *Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender,* Subsecretaría de Educación Básica, Ministerio de Educación. En la pág.17 del material para docentes, se pueden encontrar otras propuestas que permiten trabajar en el mismo sentido.

Por otra parte, la necesidad de plantear problemas con números de mayor cantidad de cifras implica el desafío de estar atentos para no caer en situaciones no verosímiles.

Con respecto a las formas de calcular, en 4° año/grado continuaremos avanzando hacia la construcción de diferentes algoritmos, tomando los cálculos como objeto de estudio en sí mismos.

Plantear situaciones para sumar y restar con distintos significados

Es probable que, al llegar a 4° año/grado, los chicos ya hayan trabajado problemas con algunos significados[28] de la suma y la resta. Aquellos donde tienen que unir dos cantidades, buscar la diferencia entre ellas, encontrar el complemento de una respecto de otra, y agregar o quitar una cantidad a otra.

Consideremos ahora algunos problemas con **dos transformaciones** que podríamos presentar para analizar sus diferencias:

- Andrés pierde 123 puntos en la primera ronda de un juego de mesa y gana 64 puntos en la segunda ronda. ¿Cómo terminó su puntaje en el juego?
- Analía pierde en la primera ronda 123 puntos, y dice que entre esa ronda y la segunda perdió en total 70 puntos. ¿Qué le pasó en la segunda ronda?

En el primer problema, hay que averiguar el resultado de la composición de dos transformaciones, una es negativa (pierde 123) y la otra es positiva (gana 64). Para componer las dos, es posible pensar en 123 - 64.

En el segundo problema, se da el resultado de componer dos transformaciones (perdió en total 70 puntos) y una de las transformaciones (perdió 123 en la primera ronda), y hay que averiguar cuál es la otra (qué pasó en la segunda ronda). Si lo que perdió en total es menos de lo que perdió en la primera ronda, es porque en la segunda tuvo que ganar y, para saber cuántos puntos obtuvo, pensamos en 123 - 70.

Es importante que los alumnos resuelvan problemas como estos para que no establezcan relaciones estereotipadas entre la forma que tiene el enunciado y la operación que "hay que hacer", como cuando afirman, por ejemplo: *si me regalan tengo que sumar o si perdí tengo que restar.* Es el análisis de los datos y de las relaciones que se establecen entre ellos lo que permitirá a los chicos elegir uno entre diversos procedimientos posibles.

[28] **Recomendación de lectura:** para analizar estos significados de las operaciones en el campo aditivo, se recomienda la lectura del apartado "Plantear situaciones para sumar y restar", en *Cuadernos para el aula: Matemática 3.*

Para que los chicos resuelvan problemas con **sumas y restas con números grandes,** un contexto posible es el del tiempo medido en años calendarios. Por ejemplo, en los siguientes casos:

- Si este año mi abuelita cumple 75 años, ¿en qué año nació?

- Cuando nació María, su mamá tenía 24 años. Si hoy María tiene 12 años, ¿en qué año nació su mamá?

- El 20 de julio del año 1969, el hombre pisó por primera vez la Luna. ¿Cuántos años han pasado hasta hoy?

Otro contexto interesante en el sentido anterior es el de los mapas de ruta o esquemas con indicaciones de distancias entre un lugar y otro:

- Leé el siguiente mapa de ruta y después contestá a las preguntas.

a) ¿Qué distancia hay entre Bariloche y El Calafate?
b) Si Gabi arregla para encontrarse con un amigo en la estación de servicio que queda a mitad de camino entre Bariloche y Esquel, ¿cuántos kilómetros tiene que hacer desde Buenos Aires para encontrarse con su amigo?
c) Juan vive sobre la ruta, a 30 km de Bariloche. ¿A cuánto vivirá de El Calafate? ¿Hay una sola posibilidad?
d) Si Gabi regresa a Buenos Aires desde El Calafate y hace 303 km desde Calafate hasta Río Gallegos, y 2552 desde allí hasta su casa, ¿cuántos kilómetros hizo en las vacaciones?

Si los datos se presentan sobre una línea, se puede aprovechar para observar las ubicaciones relativas de los puntos sobre la recta, para establecer el "km 0" a partir del cual se toman las distancias en las rutas, para ubicar algunos puntos, y luego hacer las operaciones "en proporción sobre el esquema".[29]

[29] En el apartado "Plantear situaciones para producir e interpretar representaciones del espacio tridimensional" de este *Cuaderno,* se abordan este tipo de representaciones.

En ese contexto de trabajo, es posible que los chicos realicen la hoja de ruta correspondiente a su localidad, en la que podrán incluir otras localidades cercanas pertenecientes a la ruta. Para indicar las distancias entre las distintas localidades, los chicos podrán recurrir a diferentes fuentes de información, como testimonios de vecinos, trabajadores de las estaciones de servicio o distintas fuentes escritas entre las que es posible incluir los carteles indicadores.

Plantear situaciones para multiplicar y dividir con distintos significados

Tal como venimos señalando, es necesario que sigamos presentando problemas que refieran a distintos significados para la multiplicación y la división, y donde se vaya haciendo cada vez más necesario contar con un repertorio disponible de cálculos multiplicativos que permita abordarlos eficazmente.

En 4º año/grado continuaremos trabajando[30] con problemas que involucran proporcionalidad simple (incluyendo casos de organización rectangular de sus elementos) y avanzaremos hacia otros problemas donde no aparece el valor unitario. Cabe aclarar que denominamos *problemas de proporcionalidad simple* a aquellos en los que se da el valor unitario *(Si 1 caramelo cuesta 10 centavos, ¿cuánto cuestan 8 caramelos?)* o se pregunta por él *(Si 5 caramelos cuestan 50 centavos, ¿cuánto cuesta un caramelo?).*

También avanzaremos con los problemas que remiten a la combinatoria, incluyendo dos variables, como en 3er año/grado, pero con más elementos de cada tipo, de modo de hacer más compleja la enumeración exhaustiva de los elementos, para que los chicos tengan que recurrir a la multiplicación con el fin de obtener todos los pares.

Por otra parte, el avance en los problemas de división que remiten a reparto y partición estará dado por la consideración del resto para iniciar el estudio de la relación entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto.

En este punto, es importante destacar que si bien habrá situaciones en las que los alumnos recurran a una multiplicación o a una división como procedimiento más pertinente o económico, es posible que algunos niños no hayan tenido suficientes experiencias para descubrir esto y sigan recurriendo a sumas para resolver los problemas. Una posibilidad, entonces, puede ser presentar situaciones donde sumar sea demasiado costoso y se imponga la necesidad de cambiar de procedimiento.

[30] **Recomendación de lectura:** para ampliar el análisis de los distintos significados de la multiplicación, véase el apartado “Plantear situaciones para multiplicar y dividir”, en *Cuadernos para el aula: Matemática 2 y 3.*

Por ejemplo, podemos proponer que los chicos inventen preguntas a partir de un conjunto de datos para luego diferenciar aquellas que se pueden resolver sólo con una suma de las que se pueden resolver con suma o multiplicación y, en este último caso, explicitar cuándo la multiplicación significa una economía. Si se organiza la clase en grupos de cuatro integrantes y se reparten cuatro hojitas a cada grupo, se puede proponer:

> • Inventen y escriban una pregunta en cada hoja que se pueda contestar a partir de los datos que aparecen en cada una de estas situaciones.
> a) Cinco personas van desde Rosario a Buenos Aires (300 km) y de allí a Mar del Plata (405 km). El auto que usan gasta 7 litros de nafta cada 100 km. El litro de nafta cuesta 189 centavos. En el camino paran dos veces a tomar café.
> b) Los integrantes de la cooperadora están organizando una fiesta para 140 personas y quieren comprar gaseosas, de modo que cada botella les alcance para 3 personas. Van a un supermercado que sólo las vende en paquetes de 4.

Luego se organiza una puesta en común con la consigna de diferenciar las preguntas en dos montones, el de las que se resuelven numéricamente usando solamente sumas o restas y el de las que se resuelven también con multiplicaciones o divisiones. Colgaremos dos papeles afiche y a medida que cada grupo va leyendo sus preguntas, las iremos pegando en uno de los papeles una debajo de la otra, salvo que los chicos consideren que tienen la misma pregunta, en cuyo caso la pegaremos sobre la misma pregunta.

Luego, cada grupo elige dos preguntas de cada papel afiche y elabora la respuesta. En esta propuesta es interesante que recorramos los grupos analizando con los chicos la adecuación o no de las resoluciones a la clase en la que fueron puestas y facilitando la discusión cuando aparezcan los errores.

Si en la escuela hay dos secciones de 4° año/grado o hay una escuela cercana, otra posibilidad es que los problemas los invente y agrupe un 4° año/grado y los resuelva, luego, otro año/grado de la misma u otra escuela. Esto, además, favorecería el intercambio entre docentes, y brindaría la posibilidad de discutir las articulaciones institucionales a partir de un objeto de análisis concreto, como el de la producción y comprensión de problemas.

Las preguntas que los chicos inventen para la actividad anterior y que puedan resolverse con una multiplicación o con una división remiten al significado de proporcionalidad simple ya conocido por los ellos en años/grados anteriores.

Para continuar este trabajo, es posible plantear problemas donde no se informa cuál es el valor unitario, y donde los chicos deban usar en forma implícita dos de las propiedades que caracterizan a las relaciones de **proporcionalidad directa**: Al doble de una cantidad le corresponde el doble de la otra y A la suma de dos cantidades le corresponde la suma de las cantidades correspondientes. Si proponemos estos problemas con las cantidades presentadas en tablas, facilitamos el establecimiento de estas relaciones. Por ejemplo:

• Manuel, el encargado de la boletería de pasajes de mediana y larga distancia, necesita calcular rápidamente el precio de distintas cantidades de boletos, sobre todo cuando, durante las vacaciones, llegan muchos clientes juntos. Para ahorrar tiempo, y no tener que hacer la cuenta cada vez, se armó esta tabla para los pasajes que llevan al pueblo más cercano.

Número de pasajeros	2	3	5	7
Precio de los boletos	24	36	60	72

a) ¿Cómo podría utilizar Manuel su tabla para calcular el valor de 4 boletos? ¿Y si fueran 6? ¿Y si suben 8 personas juntas? ¿Y si fueran 12?
b) ¿Por qué se le habrá ocurrido poner estas cantidades en su tabla?

Luego de que los alumnos resolvieron esta situación, podemos centrar la discusión en cómo se obtuvieron los resultados: *Si conozco el precio de 2, para calcular el de 4 duplico el precio de 2 boletos. Si conozco el precio de 3 boletos, lo duplico para conocer el de 6, etc.*, concluyendo que *Si los valores de una de las cantidades se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes a la otra cantidad sufren el mismo efecto.*

Si luego preguntamos por el cálculo de 9 u 11 boletos, se pueden abrir nuevas discusiones, ya que para calcular el valor de 9 boletos se podrán sumar el de 7 con el de 2, o bien el precio de 4 con el de 5 boletos; en tanto que para calcular el valor de 11 boletos, podremos sumar los de 7, 2 y 2, concluyendo que *A la suma de dos cantidades de boletos corresponde la suma de sus precios.* Estas observaciones pueden permitir que los niños abrevien las tablas sin tener que recurrir a la multiplicación del número en cuestión por 1, por 2, por 3, hasta llegar al 9. Además, se introducirán en las propiedades que caracterizan a las cantidades proporcionales.

Otra posibilidad para analizar las relaciones de proporcionalidad es plantear problemas donde las colecciones de elementos se presentan ordenadas en filas, o columnas, es decir en **organizaciones rectangulares,** por ejemplo:

• En el patio de la escuela, hay que distribuir sillas en filas con 15 sillas cada una. ¿Cuántas filas se pueden armar con 150 sillas? ¿Y con 240 sillas? ¿Y con 250 sillas?

También en este caso hay dos magnitudes directamente proporcionales, la cantidad de filas y la cantidad total de sillas, siendo la constante de proporcionalidad la cantidad de sillas por cada fila. Si los chicos ya han trabajado la representación en tablas, podrán usarlas para resolver el problema como una alternativa a las operaciones conocidas.[31]

En cuanto a los problemas de **combinatoria**, es decir aquellos en los que hay que combinar elementos de diferentes colecciones, es importante considerar la experiencia previa que los niños puedan tener en situaciones donde se deban combinar “todos con todos”, partiendo de procedimientos artesanales. Al usar estos procedimientos para colecciones con mayor cantidad de elementos es frecuente omitir algunas combinaciones y por ello conviene utilizar procedimientos más expertos.[32] En este sentido, podemos presentar, por ejemplo:

- En una cantina tienen colgados los siguientes carteles.

El cocinero de la cantina quiere hacer carteles donde aparezcan ofertas para pedidos de un sándwich y una bebida. ¿Cuántos carteles distintos tendrá que hacer si quiere que aparezcan todas las ofertas posibles?

[31] **Recomendación de lectura:** para profundizar, véase el Cap. 3, en Ponce, H. (2000), *Enseñar y aprender Matemática. Propuestas para el Segundo Ciclo,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

[32] **Recomendación de lectura:** un análisis más exhaustivo de los distintos procedimientos que pueden desarrollar los niños, se puede consultar en el apartado “Plantear situaciones para multiplicar y dividir”, en *Cuadernos para el aula: Matemática 3.*

Luego de analizar si la respuesta al problema es acertada, vale la pena detenerse a analizar las distintas formas de representación utilizadas, avanzando desde las menos económicas, como la explicitación de cada menú, hasta aquellas que permiten un análisis más exhaustivo de todas las posibilidades, como las que presentan la información en cuadros de doble entrada o en un diagrama de árbol y, finalmente, la más sintética y económica: multiplicar 5 x 3.

Con respecto a la división, en 4°grado/año ampliaremos el repertorio de problemas que involucran repartos y particiones para consolidar estos significados, avanzando en el **análisis del resto**. Para abordar este contenido revisando lo trabajado precedentemente, podemos comenzar presentando problemas como los siguientes:

• En el barrio de Analía, las mamás se reúnen para fabricar alfajores que luego venden para juntar dinero para el centro comunitario. Algunos sábados, Analía ayuda a embolsar los alfajores en paquetes de media docena. En agradecimiento a su labor, le permiten llevarse a su casa, al finalizar la tarea, los alfajores que sobran, porque no alcanzan para llenar otro paquete. A Analía le gusta llevar un registro de la cantidad de alfajores que se lleva a casa, por eso, cada vez que va a ayudar, completa sus anotaciones de la siguiente forma:

Cantidad de alfajores fabricados	45	34	92	100	77
Cantidad de paquetes	7				
Cantidad de alfajores que sobran	3				

- ¿Se puede saber cuál es el máximo de alfajores que Analía puede llevarse a su casa cada vez que va a ayudar?

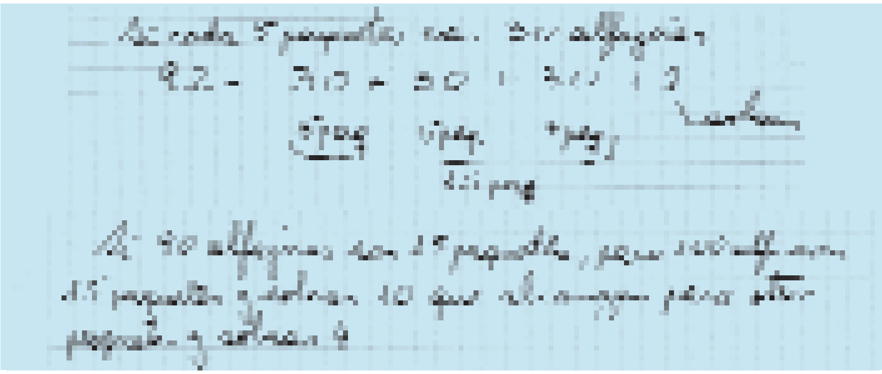
• Ayer fabricaron 120 alfajores y no sobró ningún alfajor. Hoy fabricaron 123. ¿Cómo se puede usar la información de ayer para averiguar fácilmente cuántos alfajores sobraron?

• Hoy fabricaron 200 alfajores. Mirando la tabla del primer problema, ¿qué columna usarías para resolver la situación más rápidamente?

• Completá este otro cuadro de anotaciones de Analía:

Cantidad de alfajores fabricados			95	62	
Cantidad de paquetes	6	18			
Cantidad de alfajores que sobran	1	0			2

En el primer problema, para completar algunas columnas, los niños podrán recurrir a los resultados memorizados, pensando *34 dividido 6 es 5, porque 6 por 5 es 30 y 6 x 6 es 36 y me paso.* Otros podrán recurrir a la tabla pitagórica y observar que en la columna del 6, el 34 está entre 30 y 36, y mirando la fila correspondiente al 30 podrán concluir ***6 por 5 es 30*** y ***me sobran 4***. En el caso de los valores que superan el 60 (6 x 10) este recurso les resultará insuficiente y tendrán que recurrir a nuevos procedimientos. Algunos restarán 6 sucesivamente hasta que no puedan hacerlo más, y luego contarán todas las veces que restaron el 6. Otros chicos podrán acortar este procedimiento apoyándose en sumas y/o restas tal como hacen Paula y Yanina.



En este problema, la cantidad de alfajores que puede sobrar está entre 1 y 5. En la cuenta de dividir, cuyo divisor es 6, el resto varía entre 0 y 5. Es decir que el resto es menor que el divisor.

En el 2º y 3er problemas se favorece que los alumnos utilicen la información trabajada en el primero. En el último para completar la tabla, en las dos primeras columnas tendrán que averiguar el total de alfajores fabricados y en la última también, pero en ese caso podrán descubrir que hay muchas posibilidades.

Es importante destacar que en todos estos problemas de embolsado de alfajores los alumnos usan en forma implícita las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto, y que éstas comienzan a explicitarse a partir de explicar cómo calcular el resto.

Asimismo, es posible plantear un análisis similar si en lugar de tener como dato la cantidad de alfajores por paquete y calcular el número de paquetes, se tiene como dato la cantidad total y la cantidad de paquetes iguales que se armaron y se pregunta por la cantidad de alfajores por paquete, lo que permite discutir un caso de partición.

Siguiendo con la consideración del resto, es posible proponer problemas como el siguiente, en el que las preguntas apuntan a considerar esa información:

> • 91 chicos de una escuela tienen que cruzar el río. Si en cada bote pueden viajar hasta 4 chicos:
> a) ¿Cuál es la menor cantidad de viajes que se pueden hacer para que crucen todos?
> b) ¿Cuántos botes pueden ir completos?
> c) ¿Cuántos chicos más podrían cruzar sin necesidad de usar un bote más?
> d) Si ese día hubiesen participado del paseo los 13 chicos que faltaron, ¿es verdad que necesitarían hacer 4 viajes más para que crucen todos?

Si bien para resolver las tres primeras preguntas es necesario hacer 91: 4 (cuenta cuyo cociente es 22 y cuyo resto es 3), la respuesta varía, ya que en la segunda la respuesta es el cociente; en la tercera, para la respuesta se usa el resto; y en la primera es 23 botes, número que no aparece en la cuenta y se obtiene al considerar el resto, es decir los 3 chicos que necesitan otro bote aunque esté incompleto. Problemas como este permitirán que los chicos cuestionen una costumbre muy arraigada de suponer que la respuesta a la pregunta se encuentra siempre en el resultado de la cuenta.

Es interesante tener en cuenta que problemas similares a estos, confrontados con problemas tales como *Eduardo quiere repartir la misma cantidad de dinero a cada uno de sus 5 hijos. Si tiene $ 48, ¿cuánto le corresponde a cada uno?,* son los que darán lugar a la necesidad de utilizar las fracciones o expresiones decimales cuando se trate, como en este caso, de expresar el resultado de un reparto en el que tiene sentido seguir dividiendo el resto.

Es necesario que analicemos con los niños en cuáles de las situaciones tiene sentido seguir repartiendo los elementos que sobran. Esto dependerá de las características de los mismos, ya que no es lo mismo si se trata de cintas, dinero o chocolates que de globos, autos o figuritas.

Para avanzar en las formas de calcular con números naturales

Probablemente, desde el Primer Ciclo los chicos ya hayan iniciado un proceso de producción y análisis original de los distintos procedimientos de cálculo, que han ido complejizando en la medida en que se fueron modificando las situaciones y los números involucrados.

En 4º año/grado, si bien es importante que los alumnos no pierdan la capacidad de calcular con procedimientos propios, trabajaremos para que puedan utilizar los algoritmos de la suma, la resta y la multiplicación por una y por dos cifras.

Tal vez en el Primer Ciclo se trabajó con la memorización de resultados. En 4º año/grado, es interesante que los chicos puedan componer o ampliar el conjunto de cálculos básicos de suma, resta y multiplicación que ya tienen disponibles (los repertorios aditivo y multiplicativo), incluyendo oportunidades para calcular en forma escrita y mental, no sólo en forma exacta, sino también aproximada, con el fin de que reconozcan cuándo se impone cada tipo de cálculo según la situación en la que se presenta o según los números involucrados. Esto permitirá que los niños puedan ejercer un mayor dominio sobre los mismos y, de este modo, facilitar su uso cuando haya que combinarlos para resolver cálculos más complejos.

Si bien en cada uno de los años/grados del Primer Ciclo se trabajó la memorización de cierto repertorio de cálculo, tanto aditivo como multiplicativo, es conveniente que en 4° año/grado comprobemos que el mismo esté disponible en cada uno de los chicos. Para hacerlo, se puede organizar una clase semanal de juego, en la que se trabajen los cálculos.[33]

En relación con el campo aditivo:

- Sumas que dan 10 (7 + 3), que dan 100 (40 + 60, 35 + 65, 32 + 68) y que dan 1000 (400 + 600 y 340 + 660).
- Complementos a 10 (1 + … = 10) a 100 (80 + … = 100) a 1000 (700 + … = 1000).
- Sumas de números redondos de dos, tres y cuatro cifras (40 + 30; 170 + 60; 1400 + 300; 800 + 600;…).
- Sumas de números redondos con otros no redondos (300 + 48, 200 + 50 + 7).
- Sumas y restas de múltiplos de 5 (350 + 15; 50 – 15, etc.) y de 50 (350 + 150; 500 – 150).
- Sumas o restas de la forma … +/- 10, +/- 100, +/- 1000 (78 + 10; 105 - 10; 735 + 100 o 1050 - 100).
- Aproximación y redondeo de resultados de sumas y restas.

En relación con el campo multiplicativo:

- Dobles y mitades (el doble de 28; el doble de 450; la mitad de 860; etc.),

[33] **Recomendación de lectura:** para proponer estos juegos, además de las actividades que están en este *Cuaderno*, véase *Cuadernos para el aula: Matemática 1*, páginas 68 a 72; *Cuadernos para el aula: Matemática 2*, páginas 60 y 91 a 95, y *Cuadernos para el aula: Matemática 3*, páginas 47, 75, 76, y 84 a 88.

- Productos de la tabla pitagórica y multiplicaciones y divisiones especiales (x 4 es multiplicar dos veces por 2, x 8 es multiplicar tres veces por 2, : 4 es dividir dos veces por 2).
- Productos y divisiones por la unidad seguida de 0 (x 100, : 1000).
- Productos y/o divisiones por números redondos, de la forma … x 30, : 300, x 6000.
- Estimación de la cantidad de cifras del cociente.
- Aproximación y redondeo de resultados de multiplicaciones y divisiones.
- Múltiplos de los primeros números: 2, 3, 4, 5, …
- Divisores de algunos números: 10, 12, 16, 15, 20, …

La aproximación es una parte importante de la estimación y consiste en sustituir un número por otro suficientemente próximo, no utilizable directamente por alguna causa. Las situaciones en las que se emplea la estimación son tan amplias y variadas como aquellas en las que se emplea el número. La estimación en el cálculo es una estrategia para trabajar con números en situaciones reales, que nos permite hacer una asignación rápida de los valores numéricos, manteniendo al mismo tiempo un cierto control sobre la validez de esa estimación. Esta valoración, por lo general, es mental y requiere de estrategias, que si bien son propias de cada persona, no excluyen la posibilidad de aprender otras que le den eficacia.

En esta construcción, las propiedades de las operaciones se hacen explícitas y permiten la argumentación acerca de las transformaciones que se puedan hacer para que el cálculo sea más eficaz.

Plantear situaciones para avanzar en el cálculo de multiplicaciones y divisiones

Para avanzar en el cálculo de multiplicaciones y divisiones con números más grandes, es posible pensarlos como una composición de números pequeños (una suma de varios o un producto de varios) y utilizar, para resolverlos, los conocimientos sobre productos y cocientes con números pequeños y sobre las propiedades de las operaciones.

En 4º año/grado podemos retomar el trabajo que se propone en el *Cuaderno para el aula: Matemática 3* respecto de la tabla pitagórica[34], que apunta no solo a la memorización de los productos, sino al establecimiento de relaciones entre

[34] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Plantear situaciones para sistematizar relaciones numéricas y propiedades de las operaciones" de este *Cuaderno*.

ellos, como por ejemplo *los productos de la tabla del 6 son el doble de los productos de la tabla del 3*. Al hacerlo, además de retomar las conclusiones a las que se arribaron, podremos sistematizar las propiedades utilizadas.

En principio, es necesario que retomemos qué sucede cuando multiplicamos por la unidad seguida de ceros. Esto permitirá discutir sobre la **multiplicación por los números terminados en ceros** (o números redondos) en general, es decir x 20, x 30, x 40, x 100, x 200, etc., lo que permitirá a los chicos adquirir un repertorio que es fundamental para resolver multiplicaciones y divisiones por dos cifras, realizar cálculos aproximados tanto de multiplicar como de dividir y elaborar estrategias de cálculo diferentes de las utilizadas convencionalmente en función del tipo de números involucrados. En este sentido, es importante tener en cuenta que la elección de los factores puede promover, además del uso de productos por números redondos, el de distintas propiedades.

Por ejemplo, para discutir la multiplicación por números redondos apoyados en la multiplicación por la unidad seguida de ceros, podríamos proponer:

• Sabiendo que 16 x 10 = 160, ¿cómo resolverías, sin hacer la cuenta escrita, los siguientes cálculos?

a) 16 x 20 =	b) 16 x 40 =	c) 16 X 100 =
d) 16 x 50 =	e) 16 x 80 =	

En la explicitación de las resoluciones, probablemente los chicos, según los conocimientos que tengan disponibles, recurrirán a la descomposición de uno de los factores en otros (el factor 20 en 2 x 10 o el factor 40 en 4 x 10) y después aplicarán la propiedad asociativa para luego multiplicar el resultado por diez. Por ejemplo, para 16 x 20 = 16 x 2 x 10 = 32 x 10. En este ejemplo, el uso de la propiedad asociativa se apoya en el conocimiento del cálculo de dobles.[35]

Otras situaciones en las que intervienen los conocimientos sobre productos con números redondos son aquellas en las que se discute la **división** de o por estos números. Por ejemplo:

• Si 60 : 10 = 6

a) ¿Cuánto es 60 : 30? ¿Y 60 : 20? ¿Por qué te parece que es así?

b) ¿Cuánto es 6000 : 30? ¿Y 600 : 20? ¿Por qué te parece que es así?

[35] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Plantear problemas para sistematizar relaciones” de este *Cuaderno*.

Este trabajo podremos retomarlo cuando nos aboquemos a la división por dos cifras mediante aproximaciones.

La multiplicación por los números redondos será la base para la realización de cálculos con estrategias diferentes a las convencionales. Por ejemplo, si se propone **multiplicar por 9 o por 11,** una estrategia válida para facilitarlo es la que se basa en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o de la resta.

Sabiendo que 43 x 10 = 430, resolvé los siguientes cálculos:
a) 43 x 11 = b) 43 x 9 =

Para resolver, los chicos podrían usar la propiedad distributiva de la suma o de la resta con respecto a la multiplicación, pensando así:

43 x (10 + 1)	43 x (10 - 1)
43 x 10 + 43 x 1	43 x 10 - 43 x 1
430 + 43	430 - 43
473	387

Así, los niños irán construyendo una nueva estrategia de cálculo que también podrá ser usada para resolver otros productos donde uno de los números termina en 1 o en 9, como 21 (20 + 1) o 19 (20 -1).

La multiplicación por los números redondos también será la base para la realización de **cálculos aproximados** que, además de permitir resolver ciertas situaciones, dan herramientas a los niños para controlar los resultados de las cuentas y para obtener resultados exactos en cualquier ocasión. Para esto podremos plantear:

• Para estimar el resultado de cada cálculo, completá los espacios en blanco.
31 x 42 ⟶ 30 x 40 = ... 410 : 11 ⟶ ...... : 10 = ...
390 : 9 ⟶ 390 : 10 = ... 119 x 310 ⟶ 120 x ...... = ...

• Elegí el resultado sin hacer la cuenta y explicá cómo lo pensaste. Después resolvé para saber el valor exacto:

	250		6000
a) 25 x 8	160	b) 120 x 5	600
	200		300

En el intercambio de las explicaciones, en el segundo caso se podrán descartar algunos de los resultados afirmando por ejemplo, para el problema a): *250 no puede ser, porque resulta de multiplicar por 10, por lo tanto debe ser menor que 250. Y debe terminar en 0, ya que esta última cifra resulta de multiplicar*

5 x 8. Por otro lado, si pensamos que 50 es el doble de 25, que 100 es el doble de 50 y que 200 es el doble de 100, y reconocemos que multiplicar por 8 es buscar el doble del doble del doble, resultará que el resultado es 200.

Además, para que los alumnos establezcan relaciones entre los números involucrados en la operación y el resultado obtenido, luego de comentar con el grupo los resultados y detectar cómo los consiguieron de manera más fácil, podemos preguntar: *¿Cómo aumentan los factores? ¿Cómo aumenta el resultado?* Así, fortaleceremos una actitud que más allá de hallar el resultado los lleve a "mirar la cuenta" y determinar si es posible ese resultado.

Cuando los alumnos disponen de variadas estrategias, es interesante que ante cada situación se discuta la conveniencia de realizar un procedimiento de cálculo u otro en función del tipo de números involucrados, las propiedades conocidas y los cálculos mentales disponibles. Por ejemplo:

- *para calcular 250 x 8*

es fácil descomponer en 250 x 4 x 2, si se sabe que 25 x 4 = 100,
también es fácil pensar 250 x (10 - 2) y hacer 2500 – 500,
y hacer un cálculo aproximado 250 x 10 = 2500

- *para resolver 2480 : 20*

es fácil resolver mentalmente, descomponiendo 2000 : 20 = 100; 400 : 20 = 20 y 80 : 20 = 4 y el resultado se obtiene sumando 100 + 20 + 4.
También es fácil pensar 2400 : 20 = 120 si se sabe que 24 : 2 = 12 y luego 80 : 20 = 4.

Secuencia para estimar el orden de magnitud del cociente: "Entre tanto y tanto"

Para avanzar en el cálculo de divisiones, podemos proponer actividades en las que los chicos tengan que anticipar el resultado de una división estimando el orden de magnitud del cociente y a la vez continuar con las actividades que involucran colecciones en organizaciones rectangulares.[36]

Actividad 1

Materiales: cada niño debe disponer de hojas de papel cuadriculado de uso comercial, un lápiz, goma de pegar y una tijera.

[36] Adaptación de una actividad planteada en I.R.E.M. (1985), *La division à l'école élémentaire,* Bordeaux, Universidad de Bordeaux.

Organización de la clase: cada alumno trabajará en forma individual.
Desarrollo: se propondrá la siguiente consigna copiándola en el pizarrón o presentándola en una fotocopia.

• Cortá distintos rectángulos, de modo que cumplan las siguientes condiciones.
a) 8 cuadraditos de alto y 72 en total.
b) 8 cuadraditos de alto y 144 en total.
c) 8 cuadraditos de alto y no más de 296 en total, pero que se aproxime lo más posible.
d) 9 cuadraditos de alto y no más de 178 en total, pero que se aproxime lo más posible.
e) 12 cuadraditos de alto y no más de 120 cuadraditos en total, pero que se aproxime lo más posible.
f) 144 en total.

Algunos niños podrán cortar determinando al tanteo el largo del rectángulo para luego contar los cuadraditos, otros recurrirán a cálculos escritos o mentales, algunos usarán la tabla pitagórica para encontrar algunos valores, pero verán que no les sirve para otros o podrán valerse de la propiedad distributiva cuando esta tabla no alcance para encontrar el número buscado, etc. Si se trata, por ejemplo, del punto d), donde hay que repartir 178 entre 9, los chicos podrían pensar:

- en redondear 178 a 180 y repartir 180 entre 9. Para calcular qué número por 9 da 180, pueden usar la regla de dividir 18 : 9 y después agregarle un 0, obteniendo 20, esto es, un resultado con dos cifras;
- que 10 tiritas de 9 son 90 cuadraditos (porque lo saben de memoria o porque lo buscan en la tabla pitagórica) y 20 tiritas de 9 son 180 cuadraditos.

Luego de la puesta en común, conviene que los chicos comprueben los resultados, para que puedan aceptar el procedimiento utilizado.

En otra clase, podemos aumentar significativamente el número total de cuadraditos o el ancho de los rectángulos, para que la situación no pueda resolverse contando cuadraditos en la hoja cuadriculada y deban planificar la acción con lápiz y papel.

Actividad 2

Hay que recortar un rectángulo de 15 cuadraditos de alto, y que se aproxime lo más posible a 3200 cuadraditos en total. ¿Cuál tiene que ser el ancho del rectángulo?

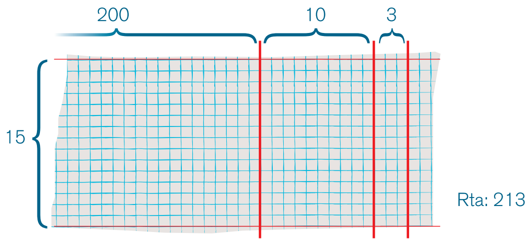
Es posible que los alumnos resuelvan la situación utilizando diferentes procedimientos, que van desde el dibujo a los cálculos, incluso que utilicen explícitamente algunas propiedades de las operaciones. Algunas soluciones podrían ser:

15 x 10 = 150

15 x 20 = 300

15 x 100 = 1500

15 x 200 = 3000



Con 3000 cuadraditos son 200 columnas de 15 y con 150 cuadraditos más, son otras 10 columnas. Entonces faltan 50 cuadraditos, y como 15 x 3 = 45, el resultado es 213 y quedan 5 cuadraditos.

Al resolver situaciones como esta, los niños se van familiarizando con la tarea de prever el resultado de una división estimando el orden de magnitud del cociente. Esto es, formulan hipótesis, y luego realizan comprobaciones, respecto de cuántas cifras tendrá el resultado de la división, lo que implica un doble desafío.

Para el ejemplo repartir 3200 entre 15, podemos pensar en que el cociente será más grande que 100, porque 100 x 15 es 1500 y porque hay más de 1500 en el dividendo. El cociente también es más chico que 1000, porque 1000 x 15 es 15.000 y no hay 15.000 en el dividendo. Por lo tanto, el cociente de 3200 : 15 es mayor que 100 y menos que 1000, es decir que tiene tres cifras.

Para comprobar que tiene 3 cifras pueden pensar que 3200 es un poco más que 3000 y que 3000 es el doble de 1500. Como 1500 : 15 es 100 y 3000 : 15 es 200, entonces el cociente será un número un poco más grande que 200 pero que no pasará de 300.

No se trata de adivinar, sino de poner en juego y formular algunas hipótesis que posiblemente se venían usando desde el Primer Ciclo respecto de la división, por ejemplo que para dividir un número es posible hacerlo *por partes,* es decir descomponiendo el dividendo y haciendo el cociente de cada parte, esto es usando la propiedad distributiva.

Luego, para reinvertir lo trabajado en la actividad con papel cuadriculado, es posible plantear algunas otras actividades sin el uso de ese recurso, de modo que para resolverlas los chicos se apoyen en las relaciones elaboradas en la puesta en común. Por ejemplo, la siguiente:

Actividad 3

Hacé un círculo sobre la respuesta que te parezca correcta y luego verificá.
Pablo tiene una banda de 12 cuadrados de ancho y quiere cortarla, de modo tal que obtenga un rectángulo lo más largo posible, pero que no supere los 168 cuadrados. ¿Cuántos cuadrados tendrá de largo?

10 66 5 12 80

Para reconocer la respuesta correcta los niños podrían decir, por ejemplo a partir de la multiplicación por 10: *si tuviera 12 cuadraditos de ancho y 10 de largo, tendría 120 cuadraditos en total, que es menos que 168, por lo tanto deberían ser más de 10 cuadraditos de largo. Si fuera el doble (20 cuadraditos), tendría el doble del total, 240, pero me paso. Si fuera de 10 y la mitad de 10 de largo, serían 120 y 60 en total, me sigo pasando pero estoy más cerca, porque son 180 cuadraditos en total. Con 15 de largo me aproximo más, pero si saco una fila para dejar solo 14, saco 12 al total y me quedan 168.*

Plantear situaciones para pasar desde los distintos procedimientos para multiplicar y dividir hacia otros más económicos

Es fundamental que también apuntemos, durante el trabajo con el cálculo, al descubrimiento de los procedimientos más económicos para que los alumnos avancen progresivamente desde los más primitivos y costosos a otros más sintéticos[37], aprovechando las relaciones numéricas y las propiedades de las operaciones que van conociendo.

Cuando se ha trabajado significativamente con el repertorio de productos y se ha sistematizado el uso de la propiedad distributiva, el avance de las distintas formas que vienen utilizando los chicos para **multiplicar** hacia el algoritmo usual de multiplicación no debería representar más que el desafío de ordenar la escritura de los números en la cuenta de un modo diferente y más "económico".

Por ejemplo, consideremos los procedimientos utilizados por algunos niños para resolver el siguiente problema: *La comuna de Alvear tiene un pequeño cine con 8 filas de 13 asientos cada una. Se está realizando un proyecto para ampliar la sala de proyección agregando 10 filas más. ¿Cuántos asientos tendrá en total?*

¿Cómo podrían resolver los chicos de 4º año/grado esta situación? Veamos tres procedimientos diferentes.

[37] **Recomendación de lectura:** para identificar algunos de estos procedimientos, véase el apartado "Plantear situaciones para avanzar desde los distintos procedimientos para multiplicar y dividir hacia los algoritmos usuales", en *Cuadernos para el aula: Matemática 3*.

Procedimiento 1:

$$13 \times 18 = 13 \times 10 + 13 \times 8$$

$$13 \times 10 = 130$$

$$13 \times 8 = 104$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ +\,104 \\ \hline 234 \end{array}$$

Procedimiento 2:

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\,8 \\ \hline 104 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\,10 \\ \hline 130 \end{array}$$

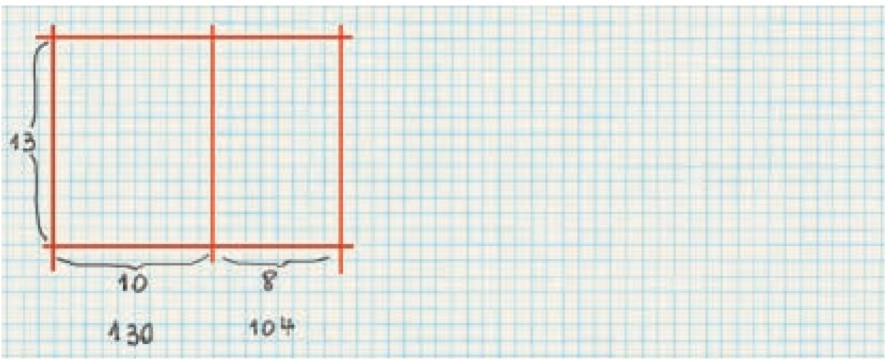
$$234$$

$$13 \times 18 = 13 \times (8 + 10)$$

$$13 \times 18 = 13 \times 8 + 13 \times 10$$

$$104 + 130 = 234$$

Procedimiento 3:



Ahora bien, ¿cómo podríamos trabajar con estas producciones de los alumnos? Una primera intervención será la de pedirles que expliquen cómo lo pensaron, ya que las producciones escritas contienen solo una parte de sus razonamientos. El resto de la clase tendrá que aceptar o rechazar con argumentos lo que sus compañeros hicieron.

A continuación, puede incluirse para el análisis de una cuenta escrita con el algoritmo convencional, la siguiente situación:

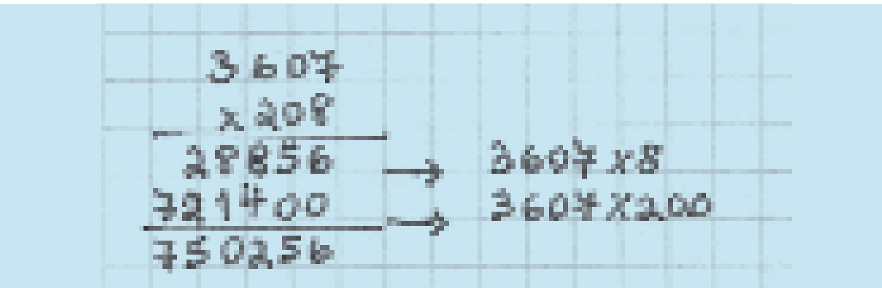
- La mamá de Ana calculó la cantidad de asientos haciendo la cuenta así:

```
     13
   x 18
  -----
  1 0 4  ──────► Resultado de 13 x 8.
  1 3 0  ──────► Resultado de 13 x 10.
  -----
  2 3 4
```

Fijate en qué se parece y en qué es distinta tu cuenta de la de la mamá de Ana.

Al realizar el análisis, los chicos podrán ver que aparecen las mismas multiplicaciones parciales y los mismos productos, sólo que están ubicados de manera diferente.

Cabe destacar aquí que si los chicos piensan las cuentas usando la propiedad distributiva disminuyen los errores cuando surgen cálculos que incluyen números con ceros entre sus cifras. Por ejemplo, para hacer 3607 x 208, pueden pensarlo como la suma de dos multiplicaciones 3607 x 8 y 3607 x 200, y escribir entonces:



Asimismo, será necesario discutir con los chicos la conveniencia de usar el algoritmo cuando se tiene, por ejemplo 2500 x 300 o 540 x1002. Estos cálculos pueden realizarse mentalmente evitando el uso automatizado del algoritmo convencional.

Las cuentas de dividir constituyen uno de los contenidos que genera muchas dificultades en la vida escolar y esto no puede atribuirse en todos los casos a la falta de conocimientos previos de los niños. El procedimiento que se aprendía de forma mecánica se apoya, en su enseñanza tradicional, sobre la verbalización de las acciones que se van realizando (algunas más explícitas que otras) y que aluden a los repertorios de la multiplicación, la resta y la descomposición de los números según su valor posicional.[38]

Si los niños han trabajado previamente con aproximaciones sucesivas de restas y han fortalecido suficientemente el repertorio de la multiplicación incluyendo productos por 10, 100, 20, 200, etc., como hemos planteado antes, podemos avanzar con cierta naturalidad hacia un algoritmo de aproximaciones sucesivas, acortando significativamente los procedimientos utilizados hasta el momento. En este sentido, proponemos mantener como expectativa la realización de un algoritmo por aproximaciones sucesivas de productos con resta incluida, cuyos pasos y resultados pueden ser controlados por los niños, y no forzar el uso del algoritmo tradicional, que oculta muchas relaciones difíciles de explicitar y controlar por parte de los niños y por ello se vuelven fácilmente olvidables.

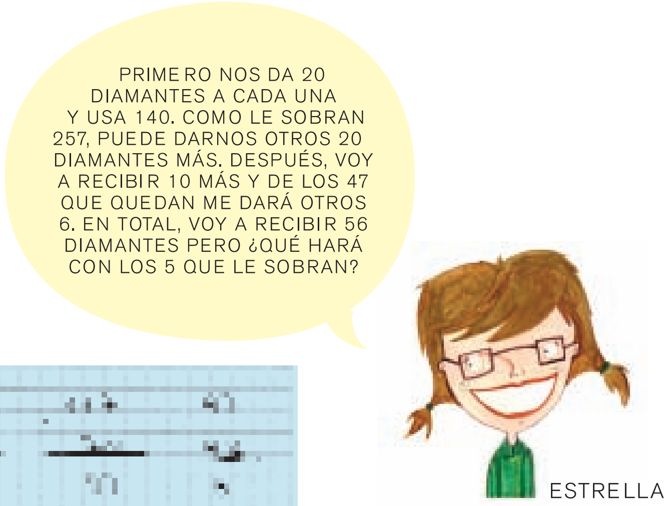
En 4º año/grado es conveniente que retomemos el trabajo de división de 3^er^ año/grado, con situaciones de reparto, aumentando el número de elementos, para que los alumnos conserven el sentido de lo que hacen. Podemos empezar planteando una situación como la siguiente:

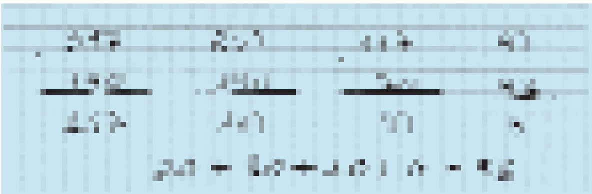
• Uno de los mercaderes más poderosos de Bagdad decide repartir 397 esmeraldas entre sus siete hijas mujeres en partes iguales. Les dijo que se las daría sólo después de que cada una indicara el número exacto que le correspondía.

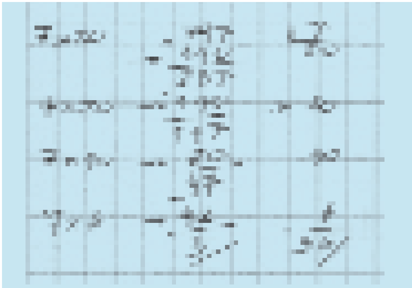
a) ¿Cómo lo harías vos?

b) Analizá y compará los distintos procedimientos que usaron cuatro de las hijas mujeres del mercader de Bagdad: Estrella, Jazmín, Zafira y Felisa.

[38] **Recomendación de lectura:** para profundizar sobre la enseñanza de la división ver Saiz, I. (1994), “Dividir sin dificultad o la dificultad de dividir” en Parra, C. y Saiz, I. (comps.), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.

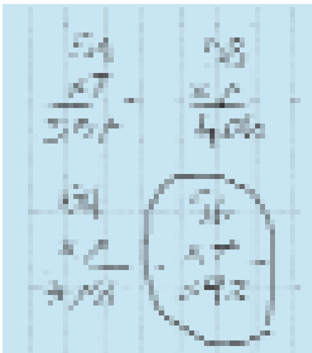

PRIMERO NOS DA 20 DIAMANTES A CADA UNA Y USA 140. COMO LE SOBRAN 257, PUEDE DARNOS OTROS 20 DIAMANTES MÁS. DESPUÉS, VOY A RECIBIR 10 MÁS Y DE LOS 47 QUE QUEDAN ME DARÁ OTROS 6. EN TOTAL, VOY A RECIBIR 56 DIAMANTES PERO ¿QUÉ HARÁ CON LOS 5 QUE LE SOBRAN?
ESTRELLA

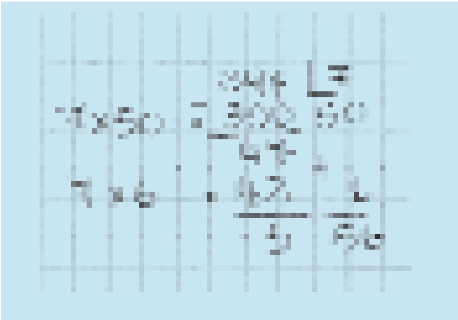





JAZMÍN


COMO 7 X 5 ES 35, ENTONCES ME VA A DAR MÁS DE 50, PORQUE 7 X 50 ES 350.
ZAFIRA

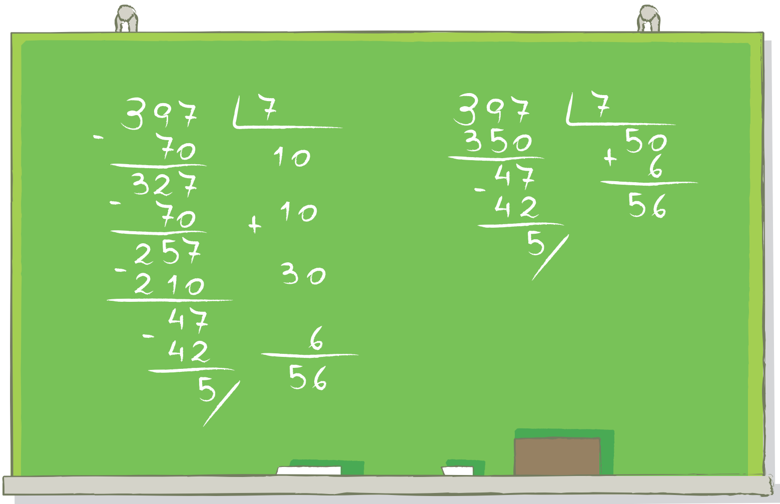




FELISA

Cuando los chicos resuelven la consigna a), podemos conocer cuáles son los procedimientos de los que disponen para resolver esta situación. Al resolver la consigna b), favorecemos la comprensión y explicitación de las propiedades y las operaciones involucradas en los distintos procedimientos presentados.

Solo después de un intenso trabajo con cuentas, que muy probablemente sean largas, es decir que en el cociente aparezcan reiteradamente cienes y dieces, nuestras intervenciones podrán apuntar al acortamiento de dicho algoritmo. Para esto, podremos escribir dos cuentas en el pizarrón y fomentar que los niños establezcan relaciones entre números del cociente.



Si, avanzados en este procedimiento, propusiéramos resolver cuentas en las que se incluyan divisores de dos cifras a partir del trabajo desplegado, esto no implicaría un obstáculo, puesto que los niños ya pueden extender este procedimiento en dichas cuentas.

El desarrollo de este procedimiento está sostenido, no sólo en la comprensión del proceso de reparto y restas reiteradas, sino también en el cálculo mental (tablas, multiplicaciones por la unidad seguida de ceros) sin cuyo dominio la estrategia no se puede sostener.

Asimismo, también es importante avanzar en el uso reflexivo de la calculadora para operar con números grandes, fortaleciendo la evaluación de la razonabilidad del resultado con el cálculo aproximado.

Plantear situaciones para sistematizar relaciones numéricas y propiedades de las operaciones

En el Primer Ciclo, los alumnos hacen uso de las propiedades de las operaciones de manera implícita al resolver ciertos cálculos, y al reflexionar sobre ellas pueden quedar enunciadas a modo de conclusiones, por ejemplo: *si cambio el orden de los números en una suma el resultado no cambia.*

En 4º año/grado, es posible introducir el nombre convencional de las propiedades para que los alumnos avancen en las posibilidades de argumentar acerca de los procedimientos con un lenguaje más ajustado. Sin embargo, debemos tener presente que la generalidad que los chicos pueden atribuir el uso de expresiones como *propiedad conmutativa* está limitada a algún conjunto de ejemplos.

Si bien en este apartado retomamos situaciones trabajadas en otras partes de este mismo cuaderno, su inclusión nos permite reconocer que los conceptos matemáticos se van cargando de significado a partir de la resolución de sucesivas y diferentes situaciones y su consiguiente reflexión. Por otro lado, es importante destacar que los conocimientos “no se apilan”, sino que se pueden establecer interrelaciones entre los mismos.

En el caso de las propiedades, tampoco se “aprenden” desconectadas de su uso en determinadas situaciones, sino que se constituyen como herramientas que nos permiten justificar y comprender diversos procedimientos de cálculo.

Para considerar las **propiedades de la suma y la resta,** podemos presentar en el pizarrón cálculos como los siguientes, para hacer hincapié en la economía del procedimiento y en su justificación.

- Resolvé de la forma más rápida que puedas y explicá cómo hiciste cada cuenta.

a) 23 + 45 + 17 + 5 + 8 =
b) 1 + 2 + 15 + 13 + 17 + 2 + 1 =
c) 50 - 8 - 6 - 5 - 4 =

Al debatir sobre la tarea realizada, luego de reconocer que el resultado es correcto, habrá que centrarse en los procedimientos empleados. Por ejemplo, en el caso de a) o de b), elegir sumandos para completar decenas implica cambiar el orden de los sumandos y asociarlos del modo elegido. Estas acciones están validadas por la posibilidad de aplicar las propiedades asociativa y conmutativa en la adición.

23 + 45 + 17 + 5 + 8 = 23 + 17 + 45 + 5 + 8 = (23 + 17) + (45 + 5) + 8 = 40 + 50 + 8 = 98

Algunos chicos pueden extender este procedimiento al caso c), asociando los números para resolver más rápido y esto conduciría a obtener resultados incorrectos. Si bien, en general, los alumnos pueden reconocer que el procedimiento es equivocado, toman real dimensión de la imposibilidad de resolver de esta forma frente a una situación problemática que se valide por el contexto. Por ejemplo, *Ana tenía $ 50 y gastó $ 8 en manteca, $ 6 en azúcar, $ 5 en harina y $ 4 en huevos. ¿Cuánto dinero le quedó?*

Luego de hacer estos análisis con toda la clase, es el momento de escribir conclusiones sobre las propiedades conmutativa y asociativa, en relación con la suma y la resta. Para el trabajo con las **propiedades de la multiplicación y la división,** propondremos un trabajo intensivo de memorización del repertorio multiplicativo a partir del establecimiento de relaciones numéricas en la tabla pitagórica.

Para esto, comenzaremos pidiéndoles que, individualmente, *completen una tabla pitagórica y que luego pinten aquellos casilleros que "conocen de memoria".* Para que cada chico tome conciencia de cuántos productos conocen, se podrá proponer un trabajo en parejas, donde cada uno ayude a asegurar al otro que los puede decir "sin pensarlo mucho".

A continuación, podremos solicitar que *busquen entre los productos aquellos que se repiten.* Por ejemplo, 24 está en 8 x 3, 3 x 8, 4 x 6, y 6 x 4. Luego, podrán ver cuáles de estos casilleros estaban pintados y relacionar nuevos productos con los conocidos.

Sería oportuno que nuestras intervenciones sean del tipo: *¿en algún caso se repiten los números en distinto orden?* Así, los alumnos podrán avanzar en el uso de la **propiedad conmutativa.**

La extensión de la propiedad conmutativa a todos los productos de la tabla pitagórica también se podrá analizar mirando una tabla incompleta como la siguiente, ya que *si se conocen los productos que pertenecen a la diagonal y a la parte superior de la tabla, entonces se pueden conocer los restantes.*

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		4	6	8	10	12	14	16	18	20
3			9	12	15	18	21	24	27	30
4				16	20	24	28	32	36	40
5					25	30	35	40	45	50
6						36	42	48	54	60
7							49	56	63	70
8								64	72	80
9									81	90
10										100

Para que los chicos deban argumentar a partir de diversas regularidades que presenta la tabla, se puede plantear:

- David dice que cuando él no se acuerda de algún producto, como 6 x 8, lo piensa así: 6 x 8 = 6 x 4 x 2 = 24 x 2 = 48. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

- Buscá otros productos de la tabla del 8 que no te acuerdes y pensalos como lo hizo David.

En este caso, se usó la siguiente **relación:** *para multiplicar un número de la tabla pitagórica por 8, lo puedo multiplicar primero por 4 y el resultado por 2.*

Otra actividad que permitirá poner en juego lo analizado en la tabla pitagórica es pedir a los chicos que resuelvan lo más rápidamente posible 5 x 9 x 2 x 3. Luego, resultará interesante discutir acerca de cuál es la mejor forma de asociar los números para resolverlo más rápidamente. En este caso, una posibilidad es comenzar haciendo 9 x 3 = 27, para luego multiplicarlos por 10 = 5 x 2. De esta manera, los chicos hacen uso tanto de la propiedad conmutativa como de la asociativa.

Para avanzar en el uso de la **propiedad distributiva de la multiplicación en relación con la suma**, se puede plantear la siguiente situación:

• Para resolver 9 x 7, Ema pensó:
Como 7 es igual a 5 + 2 puedo hacer: 9 x 5 = 45 y 9 x 2 = 18
y luego puedo sumar ambos resultados 45 + 18 = 63
a) ¿Estás de acuerdo con lo que hizo Ema?
b) ¿Podés pensarlo de otra manera?

A partir de este problema o de otros similares, podremos hacer hincapié en la equivalencia de las siguientes escrituras: 9 x (5 + 2) = (9 x 5) + (9 x 2), señalando que son ejemplos de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. En este caso, la "regla" permite facilitar este cálculo. También podremos pedirles a los alumnos que investiguen otras posibilidades de hacer el mismo producto utilizando dicha propiedad en la tabla pitagórica con el fin de corroborar si esto se cumple para otros casos, y ver que efectivamente esto ocurra, como por ejemplo en 9 x (4 + 3) = (9 x 4) + (9 x 3) = 36 + 27 = 63.

Un desafío que les permitrá a los chicos reinvertir las conclusiones obtenidas sobre las propiedades de la multiplicación, es el siguiente:

• Escribí la tabla del 12 que no está en la tabla pitagórica, usando los productos que aparecen en ella.

Para armar la tabla, los chicos podrán duplicar la tabla del 6 o triplicar la del 4, usando, en ambos casos, la descomposición del 12 en dos factores. También podrán sumar dos tablas, por ejemplo la del 10 y la del 2 o la del 8 y la del 4, lo que implica construir la tabla pensando en la propiedad distributiva.

Apuntando también al uso de la propiedad asociativa, podemos recurrir a la calculadora como herramienta que nos permite plantear un problema como el siguiente:

• ¿Cómo podemos calcular 19 x 14 si en la calculadora no se pudiera apretar la tecla del 4? Comprobalo usando la calculadora.

Otras situaciones pueden requerir de los chicos que consideren la verdad o falsedad de ciertas afirmaciones, favoreciendo, cuando explican por qué, el avance en las posibilidades de usar distintos argumentos (la propiedad, un contraejemplo, etc.). Por ejemplo:

• Decidí si las siguientes afirmaciones son o no verdaderas, y explicá por qué.
a) Todos los números de la tabla del 8 se obtienen multiplicando por 2 tres veces.
b) Todos los números de la tabla del 4 se obtienen sumando 2 a los números de la tabla del 2.

c) Todos los números de la tabla del 6 se obtienen multiplicando por 3 los números de la tabla del 2.
d) Todos los números de la tabla del 5 se encuentran sumando los de la tabla del 3 con los de la tabla del 2.
¿Podrías escribir otras afirmaciones que sean verdaderas para compartir con la clase?

A partir de la explicitación de los argumentos que se produce en el intercambio, es posible copiar las conclusiones en las carpetas o en los cuadernos o bien confeccionar carteles con los "descubrimientos" realizados por la clase, que quedarán expuestos tal como fueron formulados hasta que se vaya arribando a otras conclusiones.

Finalmente, entre las relaciones numéricas que se pueden establecer, también habrá que considerar las de **múltiplo y divisor** que, si bien están implícitamente presentes desde el inicio del trabajo con la multiplicación y la división, en Segundo Ciclo requieren de un trabajo de explicitación. En este sentido, las actividades con descomposiciones en factores ocupan un lugar prioritario.

Una posible propuesta puede ser:

• Escribí el 100 como producto de 2 factores, de 3 factores y de 4 factores.

Seguramente, habrá gran cantidad de posibilidades que pueden encontrarse estableciendo uno de los números dentro de los divisores del 100 (entre los cuales serán útiles los que se forman con la unidad seguida de ceros) y luego, por tanteo o división, los alumnos podrán encontrar el o los otros números.

Otra propuesta para pensar en pares de factores cuyo producto es un número dado (dos divisores de ese número) es el "Juego del gato".[39] Este juego exige rapidez para ganar, lo que lleva a que los niños se den cuenta de que conviene memorizar los productos.

"Juego del gato": explorar relaciones numéricas en las tablas de multiplicar.
Organización de la clase: se juega en parejas.
Materiales: un tablero y una tira de números del 1 al 12 como los siguientes:

[39] Tomado de Murphy, P., Lambertson, L. y Tesler, P. (2004), *The Math Explorer: Games and Activities for Middle School Youth Groups and Exploratorium* Grades 7–12, Emeryville, California, Key Curriculum Press. También se hace referencia al "Juego del gato" en *Cuadernos para el aula: Matemática 3,* página 89 con otro tablero.

Cuadro de productos:

11	12	14	15	16	18	20
21	22	24	25	27	28	30
32	33	35	36	40	42	44
45	48	49	50	54	55	56
60	63	64	66	70	72	77
80	81	84	88	90	96	99
100	108	110	120	121	132	144

Fila de factores:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Desarrollo: un jugador del primer equipo escoge 2 números de la fila de factores, los marca con señaladores y multiplica estos números, colocando una ficha de su color en la casilla que contiene el producto. Por ejemplo, señala 5 y 6, y pone la ficha en el 30. Luego, un jugador del otro equipo mueve solo uno de los señaladores a otro número en la fila de factores. Este jugador multiplica los números ahora señalados y coloca una ficha de su color en la casilla del producto.
Los equipos siguen alternando turnos y gana el jugador que cubre 4 casillas en línea, sin espacios vacíos en medio.

Para avanzar en la formulación de las relaciones utilizadas en el "Juego del gato", en 4º año/grado, cambiamos el tablero y focalizamos la reflexión, por ejemplo en la búsqueda de estrategias ganadoras. Para ello, podremos presentar una "afirmación para pensar" y discutir.

• Andrés dice que él siempre empieza colocando un clip en el 6 y otro en el 6 y marca el 36. En cambio, Julieta dice que ella comienza en cualquier lugar. ¿Qué habrá pensado cada uno? ¿Quién te parece que tiene más posibilidades de ganar?

Podrán surgir argumentos tales como *yo prefiero comenzar con el 36, porque está rodeado de números que se pueden ocupar haciendo más de un cálculo (24 como 4 x 6 y 2 x 12 o el 40 como 4 x 10 y 5 x 8).* Luego, orientaremos la búsqueda de otros números con características similares y así propiciaremos avances significativos en el uso de repertorios multiplicativos, a la vez que los alumnos determinan la cantidad de divisores de los distintos números.

Otra forma de producir argumentaciones donde intervengan **relaciones numéricas** será centrar la atención en el modo de construcción del cuadro de productos. Podremos, entonces, interrogar a los niños acerca de: *¿Por qué creen que el que inventó el juego, al armar el cuadro de productos, salteó algunos números?* Esto permitirá evaluar que todos los números incluidos en la tabla son productos de los números de la fila de factores.

Al jugar en reiteradas oportunidades, los alumnos podrán observar que sus progresos en la memorización de las tablas producen mejores resultados.

Las afirmaciones acerca de las diferentes posibilidades como: *Hay números con más y otros con menos divisores, Hay números que son divisores de más de un número, El número de divisores de un número* es *finito*, *Siempre puedo encontrar un múltiplo de dos números,* se irán explicitando permitiendo la circulación de ciertas conclusiones sobre la idea de múltiplos y divisores que avanzan en complejidad en el campo multiplicativo, no por el orden de numeración, sino por la potencia de las relaciones que se van estableciendo.

Para comenzar a operar con fracciones y decimales

En 4º año/grado, el significado otorgado a las operaciones con racionales estará ligado fundamentalmente a los diferentes contextos en los que se está trabajando (particiones y repartos de dinero y otras cantidades con unidades de longitud o capacidad).

En esos contextos, las situaciones que propongamos permitirán a los alumnos elaborar y comparar procedimientos de cálculo no algoritmizado (exacto y aproximado, mental y escrito) de sumas y restas entre fracciones y entre expresiones decimales y de multiplicaciones de expresiones decimales por un número natural, incluyendo el encuadramiento de los resultados entre naturales, y analizando la pertinencia y economía del procedimiento en relación con los números involucrados.

El desarrollo de estas actividades puede contribuir a incorporar diferentes expresiones de un racional en términos de expresiones equivalentes; en principio, con diferentes escrituras de una misma fracción, lo que a la vez aporta al significado de número racional. Asimismo, estas actividades permiten elaborar e incorporar cierto repertorio aditivo, utilizarlo e iniciar la memorización con el fin de ayudar al desarrollo del cálculo en grados posteriores.

Se hace especial referencia al cálculo mental con fracciones y expresiones decimales, ya que el mismo tiene rasgos que le son propios y que contribuyen a fortalecer la idea de fracción como número. Dicho de otro modo, en el cálculo escrito con fracciones, si se consideran los procedimientos clásicos, los números se trabajan fragmentados, esto es se opera con los numeradores y denominadores separadamente. Algo similar se plantea con las expresiones decimales, pues en el cálculo escrito se separa la parte entera de la parte decimal. El cálculo mental, por el contrario, exige tomar a la fracción o el número decimal como una totalidad.

Ante la pregunta *¿cuánto le falta a 2/5 para obtener 2?*, un criterio algoritmizado de cálculo supone que para responder a esta situación, sería necesario plantear la resta 2 - 2/5 y luego considerar los pasos para efectuar la diferencia entre un natural y una fracción. Sin embargo, en 4º año/grado, puede esperarse que los alumnos lleguen a la respuesta por otros caminos, por ejemplo pensando que a 2/5 le faltan 3/5 para ser el entero (o sea 1) y que le falta 1 más para llegar a 2.

En 4º año/grado, no se trata de enseñar a resolver las operaciones entre fracciones y decimales con el propósito de construir los algoritmos convencionales, sino de incorporar, de conformar cierto repertorio de sumas y de restas entre algunas fracciones (medios, cuartos), entre algunos decimales (en el orden de los centésimos y con cifras decimales 5, 10, 25, 50, 75), entre enteros y dichas fracciones, entre enteros y dichos decimales, así como cierto repertorio de dobles y de mitades.

Cabe señalar que la idea de cálculo mental no inhibe la posibilidad de realizar dibujos o cálculos auxiliares escritos como medio para resolver los planteos y que la discusión sobre las distintas producciones de los alumnos puede llevar a producir registros colectivos, a modo de afiches o notas que pueden quedar asentadas en las carpetas o en los cuadernos, y que estarán disponibles para la consulta en otras situaciones.

Plantear situaciones para operar con fracciones con distintos procedimientos (sumas, restas, dobles, etc.)

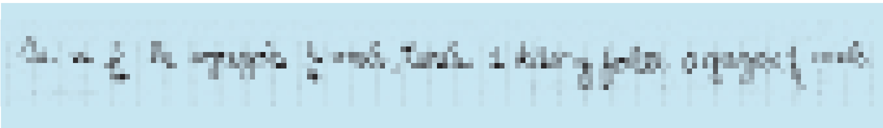
Los contextos del Sistema Métrico Legal Argentino y la medición del tiempo proveen de oportunidades para operar con cantidades expresadas de diferentes formas. La decisión de tomar una magnitud u otra para comenzar depende, fundamentalmente, del tipo de experiencias que hayan tenido los niños en relación con el uso social de las distintas unidades e instrumentos y las mediciones efectivas de cantidades que hayan realizado dentro o fuera de la escuela.

Para el caso de las fracciones, será importante que iniciemos el trabajo sobre un repertorio que, en principio, incluya simultáneamente medios, cuartos y enteros. Tal como se señaló en el apartado "Para leer y escribir fracciones y expresiones decimales", en estos contextos el uso de equivalencias y de estrategias de cálculo mental posibilita resolver un amplio conjunto de problemas sin recurrir al algoritmo. Es más, no es necesario comenzar por calcular sumas y restas de fracciones con el mismo denominador para pasar luego a sumas y restas con fracciones de distinto denominador. Este criterio de secuenciación obedece a una lógica centrada en la construcción del algoritmo, pero resulta poco operativo cuando se propone un trabajo más ligado a la construcción de sentido. Algo que puede considerarse "más fácil" para el aprendizaje de los alumnos cuando se piensa desde un mecanismo, a veces obtura la posibilidad de fundamentar lo que "se hace". A la vez, contar con la posibilidad de pensar y fundamentar cómo se calcula, facilita a futuro el control de los resultados y el uso de los algoritmos cuando estos resulten imprescindibles.

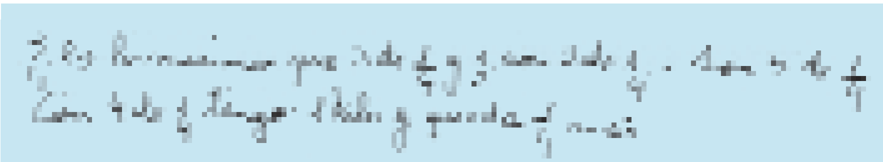
Para comenzar el tratamiento de **sumas y restas de fracciones**, se puede proponer un problema con medidas de peso como el siguiente *¿Cuánto pan compré si fui a la panadería a buscar 3/4 kg de flautitas y 1/2 kilo de figacitas?*

¿Cómo podrían resolver los chicos de 4º año/grado esta situación? Es posible, por ejemplo, resolver 3/4 kg + 1/2 kg a partir de distintas estrategias y teniendo control sobre el resultado, antes que calcular 2/7 + 3/7 o 1/3 + 1/5, sin hacer referencia a un contexto particular. Algunos de los procedimientos que usan los niños al respecto son:

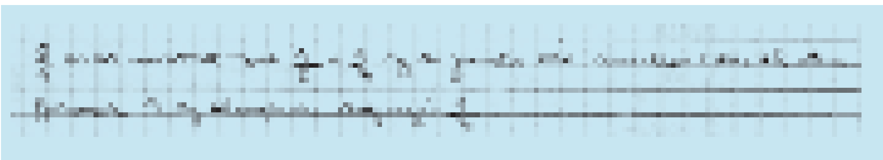
Procedimiento A:



Procedimiento B:



Procedimiento C:



¿Cómo podríamos trabajar con estas producciones de los alumnos? Analizar estos procedimientos, podría dar lugar a registrar cálculos como estos:

$3/4 + 1/2 = 3/4 + 1/4 + 1/4 = 1 + 1/4$
$3/4 + 1/2 = 1/2 + 1/4 + 1/2 = 1 + 1/4$
$3/4 + 1/2 = 3 \times 1/4 + 2 \times 1/4 = 5 \times 1/4 = 1 + 1/4$

A continuación se pueden proponer problemas como los siguientes, que permiten trabajar con estas descomposiciones:

• El ayudante de un plomero, que cobra por semana, anota las horas que va trabajando en una tarjeta. El lunes anotó 1 h y $\frac{1}{4}$ y 2 horas. El martes anotó que llegó a las 10 y cuarto y salió a las 12 del mediodía.
¿Cuánto tiempo lleva trabajado el ayudante esta semana?

• En una panadería se vende el pan en bolsitas de $\frac{1}{4}$ kg, hay un cartel con el precio, que indica $ 3 el kg.
a) Silvia tiene que comprar 2 kg $\frac{1}{2}$ para una fiesta familiar. ¿Cuántas bolsitas tendrá que comprar?
b) Graciela entró apurada, tomó 6 bolsitas y pagó con $ 4. ¿Qué le pudo haber dicho la cajera?

• Pedro, Juan y María van al supermercado a comprar bebidas para una fiesta. Pedro compra tres botellas de 1 litro y $\frac{1}{2}$, Juan 2 de 1 $\frac{1}{4}$ litro y María 1 de 2 $\frac{1}{4}$. Si ellos calculan que cada invitado toma $\frac{1}{2}$ litro y son 20 chicos, ¿cuánta bebida más falta comprar?

También interesa proponer problemas con fracciones que no se refieren a cantidades, es decir, problemas de contexto intramatemático[40] como los siguientes, que permiten a los alumnos detectar ciertas regularidades relativas al cálculo con fracciones.

• Mariana dice que $\frac{1}{3} + \frac{4}{3}$ es menor que 1. ¿Tiene razón? ¿Por qué?
Pedro dice que $\frac{5}{3}$ + 1 es menor que dos. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

[40] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Los contextos”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*.

• ¿Qué cuentas dan un número mayor que 2? ¿Y cuáles uno entre 1 y 2?

$\frac{1}{2} + 1 =$ $\quad 2 + \frac{1}{2} =$ $\quad 1 - \frac{1}{2} =$ $\quad 1 - \frac{1}{4} =$ $\quad 1 - \frac{2}{4} =$

$1 + \frac{3}{4} =$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$ $\quad \frac{1}{4} - \frac{1}{8} =$

• Completá los espacios vacíos:

$\frac{1}{6} + \ldots\ldots = 1$ $\quad \frac{5}{8} + \ldots\ldots = 1$

$\frac{3}{5} + \ldots\ldots = 2$ $\quad \frac{7}{4} + \ldots\ldots = 2$

En el primer problema, los niños tienen que comparar fracciones con 1, y suelen decir: *4/3 es mayor que 1 y si además le sumo 1/3…* O bien: *5/3 es mayor que uno y si le sumo 1 me va a dar mayor que 2.*

El segundo problema da lugar a usar las equivalencias de medios, cuartos y octavos, y surgen comentarios como *Si 1 son cuatro cuartos, 2 son ocho cuartos.* O bien: *Como en 1/2 entran dos cuartos, si sumo 1/4 más, me da...* A la vez, permite anticipar el resultado y luego comprobar el encuadramiento realizado.

El tercer problema permite establecer comparaciones y completar el entero para llegar al número natural siguiente; los chicos podrían pensar, por ejemplo: *Si tengo 3/5 y quiero llegar a 2, como a 3/5 le faltan 2/5 para llegar a 1, y todavía falta otro entero, entonces a 3/5 le falta 1 2/5 para llegar a 2.* O, si no: *Como a 3/5 le faltan 2/5 para llegar a 1, y todavía falta otro entero que son 5/5, entonces a 3/5 le faltan 7/5 para llegar a 2.*

Para que los niños tengan oportunidad de realizar **subdivisiones de las partes** o varias **veces una parte** se puede plantear:

• Resolvé y explicá en cada caso cómo lo decidiste.

La mitad de $\frac{1}{3}$ es …… $\quad$ La mitad de $\frac{2}{8}$, ¿es $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{8}$ o $\frac{1}{4}$?

La mitad de $\frac{1}{4}$ es …… $\quad$ El doble de $\frac{12}{8}$, ¿es $\frac{24}{8}$, $\frac{12}{16}$ o $\frac{24}{16}$?

En los dos primeros casos, los chicos pueden expresar sus ideas diciendo, por ejemplo, *La mitad de 1/3 es 1/6,* porque al tercio lo divido en dos partes y cada parte es un sexto. O bien: *necesito dos veces 1/6 para tener 1/3.*

En cambio, cuando se trata de calcular mitades de fracciones de numerador distinto de 1, las opciones que se plantean como respuesta potencian las formas de argumentar de los alumnos. Argumentos como *La mitad de 2/8 es 2/4, porque 4 es la mitad de 8* entran en confrontación con *¡No! La mitad de 2/8 es 1/8, porque se necesitan 2 veces 1/8 para tener 2/8* y revelan que los alumnos suelen hacer extensivas a las fracciones relaciones numéricas que usan para los naturales, en consecuencia, este es el momento de debatir la validez o no de sus afirmaciones.

En este nivel, encontrar la “mitad de” o “el doble de“ no ofrece dificultades, en tanto se trate de números naturales, pero es bastante frecuente encontrar niños que no dudan en afirmar que la mitad de 12/8 es 6/4 sin advertir que se están refiriendo a una fracción equivalente.

Para trabajar sobre la familiarización con un primer conjunto de cálculos con fracciones, hemos planteado ya los juegos “Gana el que tiene más”[41] y “Mini casita robada con fracciones”[42]. En este último caso se debe incorporar una ligera variante: en su turno, cada jugador saca la primera carta de la pila y puede levantar una o más cartas de la mesa con la condición de que las de la mesa sean equivalentes o sumen el valor de la carta de la pila. Si el jugador no encuentra cartas que cumplan con estas condiciones dejará la carta de la pila sobre la mesa.

Plantear situaciones para operar con decimales usando distintos procedimientos (suma, resta y multiplicación por entero)

Las expresiones decimales presentan indudables ventajas respecto de las fracciones a la hora de efectuar cálculos. Por un lado, resultan una extensión de la organización decimal de nuestro sistema de numeración, organización que se conserva en la mayoría de los sistemas de medida (SIMELA) y, por otro lado, son los “números” de las calculadoras, de uso cada vez más frecuente. Sin embargo, estas ventajas tienen sus límites. La analogía con la notación de los números naturales resulta favorable en muchos casos, pero genera también obstáculos cuando los niños atribuyen a los racionales propiedades que solo son válidas para los números naturales.

Las siguientes situaciones[43], en el contexto monetario, ponen en funcionamiento escrituras que refieren a precios expresados en pesos para resolver problemas de adición y sustracción, y de multiplicación por un número natural.

• Si pagás 10 centavos con una moneda de $ 1, ¿cuánto te dan de vuelto? ¿Cómo escribirías en la calculadora una cuenta que te dé la respuesta?

[41] Estos juegos se encuentran en el apartado “Plantear situaciones para comparar cantidades y números” de este *Cuaderno*. Véase también la propuesta “Guerra con cálculos”, que se puede desarrollar con las “Cartas con fracciones” incluidas en *Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender (Material para alumnos).* Subsecretaría de Educación Básica, Ministerio de Educación, pág. 18.

[42] Véase el apartado “Plantear situaciones para comparar cantidades y números expresados en forma fraccionaria y decimal” de este *Cuaderno*.

[43] Estas situaciones fueron extraídas de “Acerca de los números decimales. Una secuencia posible”, en el documento *Aportes para el Desarrollo Curricular Matemática.* GCBA, 2001.

• Si tenés 2 pesos con 73 centavos y necesitás llegar a 3 pesos, ¿cuánto te falta? ¿Qué cuenta tendrías que hacer en la calculadora? Anotala y luego comprobalo.

• ¿Cuánto hay que agregar si tenés 2 pesos con 3 centavos y necesitás 3 pesos? ¿Cómo harías la cuenta en la calculadora?

Estos planteos hacen “funcionar” los conocimientos que los chicos disponen sobre las escrituras decimales, porque la escritura en centavos de algunas de las cantidades del problema y la exigencia de usar la calculadora para hacer la cuenta los obligan a recurrir a los acuerdos y los registros realizados: 10 centavos = $ 0,1; $ 2 con 3 centavos = $ 2,03, etcétera.

Esperamos que los alumnos reconozcan que la cuenta que resuelve el problema de averiguar *cuánto falta para llegar a tanto* es una resta. Este planteo pone en funcionamiento el significado de complemento para la resta ya frecuentado por los alumnos en el Ciclo anterior con los números naturales. Pero es sabido que el tipo de números con que se trabaja constituye una dificultad para el reconocimiento de ciertas relaciones, de ahí que algunos alumnos pueden sumar 2,73 + 0,27 = 3, a partir de calcular mentalmente el complemento de 2,73 para 3. La discusión, entonces, debiera orientarse sobre qué significa *calcular con la calculadora...* y diferenciarla de *usar la calculadora para saber si pensé bien.*

Otras situaciones como las siguientes, con la exigencia de hacer la cuenta con la calculadora, incorporan la reinversión de otros significados para la resta y de la multiplicación entendida como sumas reiteradas.

• Con un billete de $ 5 pagué una cuenta de $ 3,25. ¿Cuánto me dieron de vuelto?

• Paulina averiguó que el pincel que necesita comprar cuesta $ 2,50 y su amiga dice *Yo lo compré en otra librería a dos pesos con quince centavos*. ¿Quién lo pagó más barato? ¿Cuánto más barato es en una librería que en la otra?

• Con 3 monedas de $ 0,50, 3 monedas de $ 0,25 y 3 monedas de $ 0,10.
a) ¿Se pueden pagar justo las siguientes cantidades? ¿Cómo?
$ 1,80 $ 2,45 $ 1,05 $1,15 $2,60
b) Hacé las cuentas con la calculadora y anotalas[44].
c) ¿Será posible hacerlo de diferentes maneras? Anotalas.

[44] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Construir condiciones para resolver problemas”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno.*

En el primer problema, la resta está vinculada con la idea de quitar, perder, etc., en tanto que en el segundo está referida a la diferencia entre las dos cantidades.

El último problema permite el tratamiento de casos con solución única (como \$ 2,45), de casos con más de una solución (como en \$ 1,80 y \$ 1,05) y de casos sin solución posible (como \$ 2,60 y \$ 1,15). Argumentar sobre las distintas soluciones abonará el tratamiento de las equivalencias entre 2 de \$ 0,50 = \$ 1; 2 de \$ 0,25 = \$ 0,50; 3 de \$ 0,50 = \$ 1,50; 3 de \$ 0,25 = \$ 0,75, etc.

Análogamente a lo expresado para las fracciones, las siguientes situaciones buscan conformar ciertas regularidades para el cálculo de los decimales.

• Continuá las siguientes escalas:
0,5 - 1 - 1,5 - 2 - ....
0,25 - 0,5 - 0,75 - 1 - ....

• Buscá una manera rápida de saber el resultado de los siguientes cálculos y explicala.

3 + 0,25 + 0,50 + 0,25 = 1,25 + 0,20 + 0,30 + 0,25 =
0,75 + 4 + 0,50 + 0,25 = 2 - 0,75 =

• Completá.

El doble de 0,25 es……. El doble de 0,75 es….
El doble de 1,25 es……... El doble de 1,50 es……

• Pedro dice que el doble de 3, 75 es un número que está más cerca del 7 que del 8. ¿Tiene razón?

A partir del trabajo desarrollado hasta aquí, los alumnos han elaborado ciertas estrategias de suma y resta válidas para los casos planteados, aunque no posean todavía una regla general que les permita resolverlas. Además, es posible que hayan memorizado, por el uso, cierto repertorio aditivo y de equivalencias.

Como hemos señalado, no se trata únicamente de resolver los problemas y llegar a los resultados, sino también de comparar los procedimientos de resolución, debatir sobre la validez de los mismos y de los resultados obtenidos, formular y registrar las conclusiones, los razonamientos, las estrategias, de manera que puedan recuperarse cuando se necesiten.

Para trabajar con la información

La multiplicidad de formas en que los alumnos pueden acceder a la información en la vida cotidiana representa, para la escuela, además de una fuente de materiales para el aprendizaje, un importante desafío: proporcionar las herramientas para procesarla.[45]

Por ello, es importante que utilicemos aquellos portadores de información con los que los niños conviven diariamente, para ofrecer situaciones donde tenga sentido la transformación de la información para su comunicación y en las cuales se imponga la necesidad de analizarla para relacionarla con aquello que se busca, planificar una estrategia y evaluar la razonabilidad de los resultados.

El trabajo con el tratamiento de la información involucra, además de la comprensión de la información que se presenta en los más variados portadores, la producción de diferentes modos de presentación de la información, para que estos procedimientos puedan ser además utilizados en otras áreas curriculares.

En 4º año/grado, introduciremos variadas situaciones en las que los alumnos tendrán que formular preguntas a partir de variados portadores (lámina, texto escrito, tablas, etc.), favoreciendo así la interpretación de la información disponible en cada tipo de texto.

Otro aspecto a considerar es la recolección y la organización de datos. Es importante que los alumnos no sólo interpreten la información en tablas, sino que también avancen en la confección de tablas y gráficos de barras, que les permitirán organizar la información recolectada.

Plantear situaciones para establecer relaciones entre datos e incógnitas

Al centrarnos en la producción de preguntas para los distintos tipos de portadores de información, tendremos en cuenta, por un lado, la variedad de portadores y, por otro, el tipo de preguntas que se pueden formular a propósito de cada texto.

Para formular las preguntas, los niños tendrán que seleccionar la información disponible que deberán tener en cuenta para su respuesta. Algunas preguntas

[45] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Las relaciones entre preguntas y datos”, en “Enseñar Matemática en el Primer Ciclo” de este *Cuaderno.*

podrán requerir que simplemente se ubique la información en el texto, pero en otros casos las mismas promoverán el establecimiento de una relación o la realización de una operación con la información en cuestión.

Otro aspecto a tener en cuenta es la cantidad de respuestas que se pueden dar a las preguntas: ninguna, una o varias.

No se trata de proponer la invención de preguntas sólo por hacer "gimnasia". Es necesario que en cada caso tomemos decisiones acerca de los significados de las operaciones que pretendemos que queden involucradas y cuáles son las restricciones que impondremos para enriquecer la tarea. Si la consigna para inventar preguntas es "sin condiciones" es posible evaluar lo que a cada niño le interesa destacar o le parece relevante del texto.

Una primera opción es presentar textos incompletos para que los niños inventen preguntas, como por ejemplo:

• Inventá una pregunta que se pueda contestar a partir de esta situación. Si es necesario, agregá datos que sean necesarios para responderla.
Martín vive en un edificio. En los primeros 4 pisos hay 6 departamentos por piso y en los restantes pisos hay 8 departamentos por piso.

• A estos problemas les falta una pregunta. Formulá una de manera que para contestarla se usen todos los datos del enunciado. Luego respondela.
a) La mamá de Bárbara gastó $ 120 en una compra. Le dieron de vuelto $ 80.
b) El cajero de un banco tiene billetes de $ 10, de $ 50 y de $ 100. Una persona fue un día a este banco a cobrar $ 530.

En estos problemas, los alumnos pueden usar tanto la suma como la multiplicación. Además, las condiciones ***agregar datos y que la pregunta requiera*** que se ***usen todos los datos*** también complejiza la tarea a realizar. Es conveniente que los niños se acostumbren, luego de cumplida la consigna, a resolver el problema para comprobar si lo que hicieron cumple con las condiciones impuestas.

Otra opción, más conocida en las aulas, pero no por eso menos importante, consiste en formular preguntas acerca de un ticket de supermercado, de un boleto de transporte de pasajeros, etc., cuya lectura involucra, además, la presencia de muchos datos útiles y de otros irrelevantes, al momento de centrar la atención sobre algunos para idear las preguntas.

Podemos proponer a los alumnos que lleven al aula alguno de estos portadores: boletas de compra, boletos de colectivo, ticket de cualquier negocio, etc. Según las características de cada localidad y organizados por grupos, podrán realizar un listado de preguntas que se puedan contestar a partir de esos portadores.

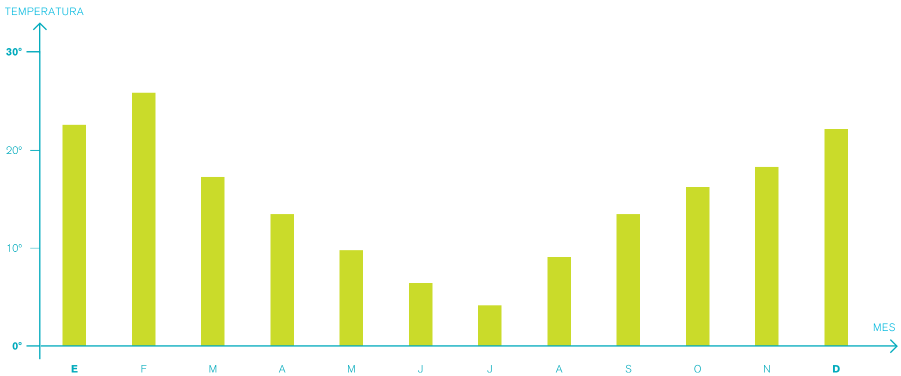
Ante esta propuesta, es habitual que los niños formulen preguntas que se pueden contestar con solo leer el ticket, como por ejemplo: *¿Cuántas botellas de aceite compró? ¿Qué hora era cuando pasó por la caja? ¿Cuánto gastó en total? ¿Cuánto cuesta el kilogramo de manzanas?* Será oportuno solicitarles que formulen preguntas para responder a partir de un cálculo.

También es posible proponer el mismo trabajo de invención de preguntas a partir de tablas o gráficos que suelen encontrarse en diarios y revistas. Por ejemplo:

"La recopa"

Equipos	Partidos jugados	Partidos ganados	Partidos empatados	Partidos perdidos	Goles
Rojo	15	12	1	2	17
Verde	15	13	1	1	20
Amarillo	15	10	3	2	10
Azul	14	7	7		12

Temperatura media en Buenos Aires



En estos casos, para poder inventar las preguntas, los chicos necesitan primero leer la información.

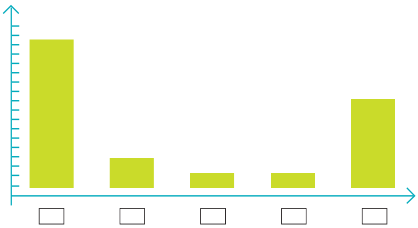
Plantear situaciones para obtener y organizar datos

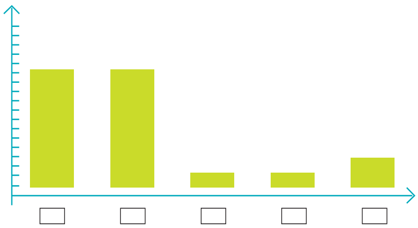
Siguiendo con el trabajo iniciado en el Primer Ciclo, centrado en debatir con los niños la manera más conveniente de recabar la información necesaria y de cómo organizar y registrar los resultados obtenidos, ya en el Segundo Ciclo los chicos probablemente puedan comparar dos gráficos o descubrir contradicciones entre los mismos o entre los datos recolectados y el gráfico. Por ejemplo, si les planteamos:

• Se recogieron las respuestas de un grupo de 1000 personas acerca de la cantidad de libros que leen en un año, y se organizaron en el siguiente cuadro:

Cantidad de libros leídos	1	2	3	4	5 o más
Cantidad de personas	500	100	50	50	300

Al observar los valores, podemos plantear la posibilidad de que realicen un informe escrito acerca de las características de esta población, si son buenos lectores, qué se observa acerca de los valores extremos, etc. Y luego proponer que descubran cuál de los siguientes gráficos puede corresponder a la tabla, que completen las cantidades en los ejes (personas o libros leidos), que argumenten acerca de su afirmación y completen con los valores numéricos correspondientes.





Una vez descubierto cuál es el gráfico correcto, se podrá proponer que se confeccione una tabla con los valores que corresponden al otro. Así, estaremos planteando el camino inverso respecto del análisis de la información entre tabla y gráfico.

En las áreas de Ciencias Sociales y Ciencias Naturales, los alumnos leen textos informativos que, en muchos casos, incluyen gráficos y tablas. Por eso, al proponer un trabajo comprensivo de esos gráficos, se avanza en nuevos ejemplos que amplían el repertorio de variables y relaciones representadas. Por ejemplo, en *Cuadernos para el aula: Ciencias Sociales* de 4to año/grado, en el Eje "Las actividades humanas y la organización social", aparece un cuadro denominado *Requisitos para la creación de municipios por provincia.*

nap

El reconocimiento y uso de relaciones espaciales.

El reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos y la producción y análisis de construcciones considerando las propiedades involucradas.

La comprensión del proceso de medir, considerando diferentes expresiones posibles para una misma cantidad.

El análisis y uso reflexivo de distintos procedimientos para estimar y calcular medidas.

Geometría
y Medida

Geometría y Medida

Los saberes que se ponen en juego

Para que los alumnos puedan aprender los saberes incluidos en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, en la escuela tendremos que proponer situaciones de enseñanza en las que se pongan en juego distintos aspectos de los mismos. Se trata de que los conocimientos matemáticos se introduzcan en el aula asociados con los distintos problemas que permiten resolver, para luego identificarlos y sistematizarlos.

- Establecer las referencias necesarias para ubicar objetos en el espacio tridimensional o sus representaciones en el plano.
- Interpretar y elaborar representaciones del espacio próximo, teniendo en cuenta las relaciones espaciales entre los objetos representados.
- Describir, reconocer y comparar triángulos, cuadriláteros y otras figuras, teniendo en cuenta el número de lados o vértices, la longitud de los lados, el tipo de ángulos, etcétera.
- Describir, reconocer y comparar cuerpos según la forma y el número de caras, y representarlos con diferentes recursos.
- Copiar y construir figuras[1] utilizando las propiedades conocidas, mediante el uso de regla, escuadra y compás, evaluando la adecuación de la figura obtenida a la información dada.
- Componer y descomponer figuras, estableciendo relaciones entre las propiedades de sus elementos.
- Analizar afirmaciones acerca de las propiedades de las figuras dadas y argumentar sobre su validez.[2]

[1] La complejidad de la tarea estará dada por el repertorio de figuras y propiedades involucradas y por los materiales que se utilicen.

[2] La complejidad de la tarea estará dada por el repertorio de figuras y propiedades involucradas, promoviendo el avance desde comprobaciones empíricas (plegados, superposiciones, comparaciones, usando regla o compás) hacia argumentaciones más generales.

- Estimar, medir efectivamente, eligiendo el instrumento y registrar cantidades, utilizando una unidad adecuada[3] en función de la situación.
- Comparar y medir ángulos con diferentes recursos, utilizando el ángulo recto como unidad y fracciones de esa unidad.
- Comparar y calcular cantidades de uso social habitual, estableciendo equivalencias si la situación lo requiere.

Propuestas para la enseñanza

En este apartado, intentamos precisar el alcance y el sentido de los conocimientos que se priorizan en el Eje "Geometría y Medida". Para ello, proponemos algunos ejemplos de actividades para desarrollar en el aula y de producciones de los niños. Además, presentamos secuencias de actividades que muestran el tipo de trabajo matemático propuesto desde el enfoque explicitado en el inicio de este *Cuaderno*[4].

Para establecer y representar relaciones espaciales

El dominio del espacio es objeto de aprendizajes por parte de los niños desde mucho antes de que comienzan la escolaridad obligatoria y se apoya en una multiplicidad de interacciones con el medio material y humano. En función de estas interacciones, los niños, al iniciar su escolaridad, han logrado un cierto dominio práctico del espacio que los rodea y han elaborado ciertas concepciones ligadas a los objetos y a los lugares que lo constituyen. Por ejemplo, pueden reconocer algunas posiciones de los objetos con respecto al propio cuerpo y de los objetos entre sí, y comparar longitudes y distancias.

Una de las funciones de la enseñanza en el área de Matemática es enriquecer estas concepciones iniciales, desarrollando la comunicación de la información sobre el espacio cotidiano, el poder de anticipación y el control de los efectos de las acciones sobre ese espacio. Esto ocurre, principalmente, cuando se propone pasar de la percepción del espacio en sentido práctico a la representación del espacio. Un campo de experiencias fecundo en relación con las prácticas sobre el espacio sienta las bases para el desarrollo del pensamiento geométrico en el niño. El control del espacio físico habilitaría en los chicos múltiples posibilidades:

[3] Para expresar las medidas, se usarán fracciones y expresiones decimales con el alcance que se señala en el Eje "Número y Operaciones" de estos Núcleos de Aprendizajes Prioritarios.

[4] En reiteradas ocasiones, se propondrán actividades a partir de lo que se ha realizado en el año/grado anterior. En los casos en que los chicos no hayan realizado dicho trabajo u otro similar, es conveniente consultar *Cuadernos para el aula: Matemática 3* para que, en función de los conocimientos del grupo, el docente decida cómo adaptar la propuesta que allí se incluye.

- desplazar objetos para encontrar y comunicar su posición en el espacio;
- reconocer, describir, recorrer y transformar desplazamientos en el espacio y
- reconocer, describir, fabricar y transformar objetos.

Dado que muchos de estos conocimientos se generan de modo práctico fuera de la escuela, se podría pensar que todos los aprendizajes que se vinculan al dominio espacial se adquieren en toda su complejidad de esta forma. Sin embargo, son numerosos los indicios acerca de las dificultades que poseen los jóvenes y los adultos en relación con prácticas espaciales complejas que exigen la anticipación, el control, la comunicación y la representación de las relaciones que se ponen en juego en y con el espacio.

El trabajo con las representaciones juega un papel fundamental en la evolución de los conocimientos espaciales, sobre todo cuando se trata de controlar un espacio mayor que el que se abarca manual o visualmente. Describir, comunicar e interpretar, tanto la ubicación de los objetos como sus posibles desplazamientos, permite la utilización de diagramas, dibujos o gráficos. En este sentido, entendiendo la comunicación oral de relaciones espaciales como una forma de representarlas, el vocabulario específico se irá introduciendo naturalmente cuando se necesite describir, comunicar o representar figuras, posiciones y desplazamientos.[5]

Las representaciones pueden ser objeto de estudio desde distintos aspectos. Entre ellos, su adecuación al problema para el cual son producidos o utilizados, lo que requiere seleccionar la información para resolver el problema que se plantee; la legibilidad, es decir la posibilidad de interpretación de los medios y los códigos utilizados; las relaciones entre lo representado y su representación; las variaciones de las representaciones según los puntos de vista del observador.

Así, el trabajo sobre las representaciones del espacio es uno de los ejes de las propuestas para el Segundo Ciclo. En 4° año/grado buscaremos continuar con las experiencias realizadas en el Primer Ciclo para complejizarlas, ampliarlas y profundizarlas. Es por ello que proponemos plantear un conjunto de situaciones problemáticas, como las que se describen a continuación, que permitan el reconocimiento y el uso de relaciones espaciales en diversos espacios, tanto conocidos como nuevos, de distintos tamaños, y fundamentalmente representados. Sin embargo, como las prácticas efectivas sobre el espacio favorecen el desarrollo de las primeras nociones de ubicación y orientación, estas debieran ser incluidas en las clases si no han sido desarrolladas durante el Primer Ciclo.

[5] **Recomendación de lectura:** para la caracterización de problemas espaciales, se puede profundizar en Broitman, C. e Itzcovich, H. (2003), “Geometría en los primeros años de la EGB: Problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza”, en Panizza, M., *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*, Buenos Aires, Paidós.

Por medio de estas situaciones, se busca promover que los niños interpreten y describan posiciones en el espacio y en el plano; interpreten y describan trayectos en el espacio y en el plano, que no hayan sido necesariamente recorridos por los niños; identifiquen e interpreten códigos de señalización en mapas, interpreten planos de espacios no conocidos y elaboren planos de espacios conocidos, pero de mayor tamaño que los realizados en el Primer Ciclo.

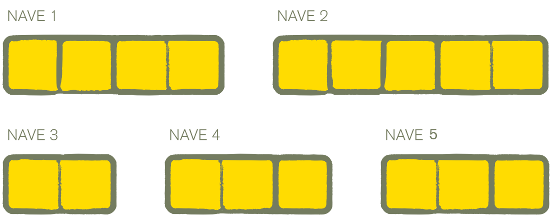
Plantear situaciones para ubicar posiciones en función de distintas referencias

Con el fin de que los chicos desarrollen aprendizajes que les permitan ubicarse en función de distintas referencias, tendremos en cuenta algunas propuestas para ubicar posiciones tanto en el espacio de dos como de tres dimensiones, variando la cantidad y el tipo de referencias.

En la propuesta de *Cuadernos para el aula: Matemática 3*, se propone que los niños resuelvan situaciones del tipo ”La batalla naval”, en las que es necesario ubicar un objeto en una cuadrícula recuperando, de ese modo, un juego muy habitual entre los chicos de estas edades. Se trata de un ejemplo particular de ubicación de una posición en la que el espacio es de dos dimensiones y donde se toman dos referencias: un eje horizontal, donde las posiciones sucesivas se indican con números y otro eje vertical donde las posiciones se indican con letras.

“La batalla naval” podría ser retomada o planteada por primera vez en 4° año/grado, enriqueciéndola con una cuadrícula que contenga más casilleros y con objetos que, por sus características, exijan mayor nivel de anticipación para ubicarlos en la cuadrícula.

“Batalla naval”: usar coordenadas para la ubicación precisa de puntos en el plano.
Material: 2 cuadrículas para cada pareja de alumnos. Cada una es de 11 x 11 con letras de la A hasta la J, en la primera columna, y con números de 1 al 10 en la primera fila, dejando en ambos casos el primer casillero vacío. 5 fichas que representan los barcos.: 2 fichas de 3 casilleros, 1 ficha de 2, 1 de 5 y otra de 4, como se indica a continuación:

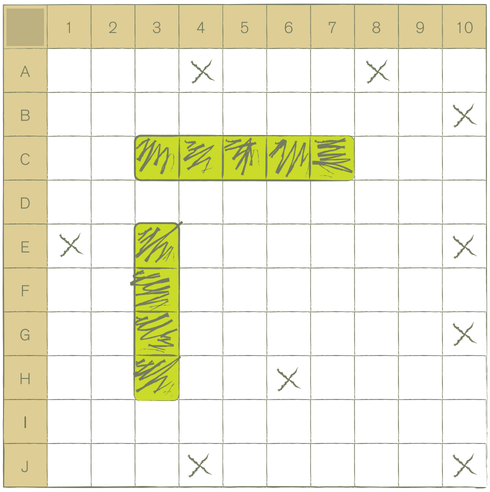


Organización de la clase: se divide en grupos de 4 alumnos, a la vez subdivididos en parejas.

Desarrollo: el juego consiste en “hundir” las naves del equipo contrario. Las parejas de cada grupo se ubican de modo de no poder ver las cuadrículas de sus compañeros. Cada pareja debe colocar las fichas (naves) en una de sus cuadrículas, de modo tal que no resulten “vecinas” y en ella irán marcando las posiciones que diga la pareja opositora. Luego, cada uno a su turno, debe tratar de averiguar la posición de las naves de la pareja opositora. Para ello, deben usar pares de números y letras, por ejemplo: *A;4*. La otra pareja contestará *averiado*, *hundido* o *agua (X)*, según si el par corresponde a una parte de la nave, completa su localización o si no corresponde a la posición asignada respectivamente. El registro de esta información en la otra cuadrícula permite controlar las jugadas y facilita el logro del objetivo.

Según la experiencia previa de los chicos, propondremos jugar una o varias veces y también decidiremos si se plantean o no actividades con jugadas simuladas. Esto significa una tarea de mayor complejidad, pues los chicos deben responder sin realizar efectivamente la jugada. Una actividad con jugadas simuladas es la siguiente:

• Juan ya le había hundido dos barcos a Marcos: uno como la nave 2 y otro como la nave 1. Este es su tablero:

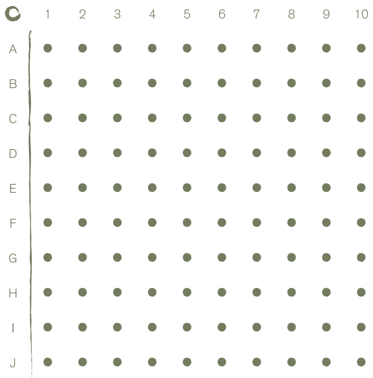


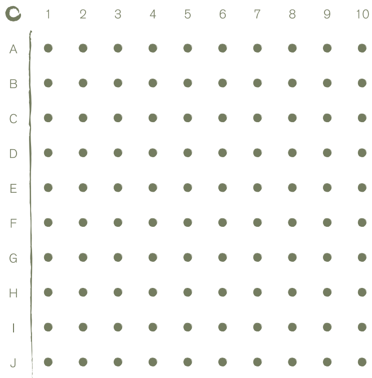
a) A su turno, Juan le dice *F8* y Marcos le contesta: *Averiado*. Indicá de cuántos casilleros puede ser el barco.
b) Señalá en la cuadrícula todos los lugares en los que podría estar el barco y luego escribí los pares que podrá nombrar Juan para intentar hundirlo.
c) En la próxima jugada Juan dice *F7* y Marcos responde *Averiado*. Escribí los pares que permitirían localizar exactamente el barco.

Esta actividad permite discutir cuáles son las estrategias que los alumnos utilizan para intentar localizar las posiciones de los barcos que, en este caso, resultan de una sucesión de dos, tres, cuatro o cinco posiciones que tienen todas la misma letra (están en la misma fila) o todas el mismo número (están en la misma columna).

Si los chicos ya hubieran realizado actividades similares a las presentadas, pasaremos directamente a “La batalla geométrica”.[6]

Una variante interesante, similar a “La batalla naval”, pero quizás menos conocida por los chicos, es “La batalla geométrica” en la que se propone cambiar los tableros de juego por otros, con las mismas referencias en filas y columnas, pero reemplazando las celdas por puntos y cambiar las naves por formas geométricas, como rectángulos y cuadrados.





Podemos presentar el juego con una consigna como la siguiente:

> • *Cada jugador traza, en uno de los tableros, tres figuras que sean cuadrados o rectángulos. Cada una de las figuras debe tener desde uno y hasta cuatro puntos interiores y no pueden tocarse ni superponerse. El objetivo es descubrir dónde están ubicadas cada una de las tres figuras que dibujó el otro jugador. Para eso, por turno, los jugadores van diciendo posiciones y anotando en el segundo tablero la característica de ese punto según sus contrincantes respondan “vértice”, “lado”, si es un punto de un lado distinto de un vértice, o “interior”, si es interior a la figura o “nada” si no pertenece a ella. Gana el jugador que primero descubra la posición exacta de las tres figuras.*

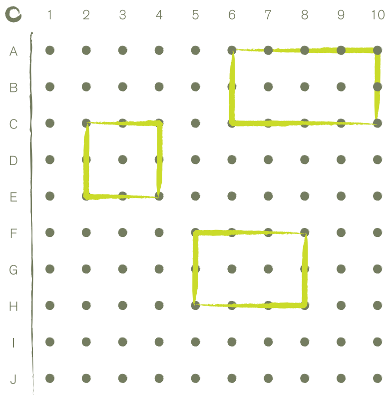
[6] Esta actividad es una adaptación de la que aparece en Chara, S., Zillberman, G. (2004), *Los libros de 4°. Matemática*, Buenos Aires, Longseller.

La innovación del juego, que implica una doble complejización, suele suscitar un poco de sorpresa, desconcierto y también respuestas activas de búsqueda, ensayo y error, por parte de los chicos. Por un lado, el tamaño de las figuras pueden elegirlo ellos, pues la restricción "con uno a cuatro puntos interiores" conduce a que los cuadrados tengan uno o cuatro puntos interiores y los rectángulos uno, dos, tres o cuatro puntos interiores. Por otro lado, los puntos que determinan las figuras no están todos alineados, por lo tanto habrá que tener en cuenta las características de las figuras para elegir los puntos.

En este sentido, es posible proponer diferentes niveles de complejidad: las figuras pueden tener los lados paralelos a los ejes o no. Esto podrá ser instrumentado por el docente según sus propósitos y las características de su grupo de alumnos.

También en este caso, luego de varias jugadas, podemos presentar para realizar, en forma individual y por escrito, actividades en las que se plantean jugadas simuladas, como la siguiente:

• Andy está jugando con Ema y puso sus barcos en este tablero:



a) Cuando Ema dijo *A8*, Andy le contestó *lado* y cuando dijo *A6* y *C10*, le respondió *vértice*. Indicá qué puede decir Ema para encontrar los otros vértices de la figura.
b) Ema dijo *F5* y *F8* y Andy le contestó *vértice*. Si ahora dice *I5,* ¿qué figura cree que encontró?

Desde el punto de vista de la apropiación de nociones espaciales, lo interesante de "La batalla geométrica" radica en que el tablero, al estar conformado por puntos y no por casilleros como en "La batalla naval", se ajusta más a las condiciones que se requieren para ubicar o localizar puntos en el plano, aprendizaje que irá siendo más relevante a medida que se avanza en la conceptualización del espacio matemático.

Plantear situaciones para producir e interpretar representaciones del espacio tridimensional

Para que los niños establezcan relaciones entre el espacio tridimensional y sus representaciones bidimensionales, podemos proponer, por ejemplo, que interpreten planos de viviendas y que elaboren croquis para que se familiaricen con las convenciones que se tienen en cuenta al dibujarlos. En el caso que los chicos no hayan tenido la oportunidad de trabajar con propuestas como estas en los años anteriores, recomendamos hacer una adaptación de las que aparecen en *Cuadernos para el aula: Matemática 3* y desarrollarlas, antes de avanzar con las siguientes.

La complejización de la tarea en 4° año/grado está dada por diferentes criterios: el aumento del tamaño del espacio representado, el tipo de relaciones entre los elementos que lo componen, el conocimiento o no del espacio sobre el que se trabaje y el avance en las exigencias respecto de la adecuación entre la situación espacial real y su representación.

Muchos conocimientos espaciales, como ya hemos mencionado, se han adquirido en una primera apropiación no escolar, en el marco de las prácticas y las interacciones sociales. Sin embargo, existen algunos conocimientos, por ejemplo, los referidos a la producción e interpretación de mapas y planos, cuya adquisición involucra representaciones simbólicas convencionales y, por lo tanto, exigen, para su construcción, una interacción sistemática con esas representaciones y un caudal de información que debe ser comunicado.

Avanzamos, entonces, compartiendo algunos itinerarios de trabajo posibles.

Las propuestas que involucran el estudio y el análisis de mapas, en la escuela provienen generalmente de las Ciencias Sociales y suelen ser una buena ocasión para trabajar buscando nexos con la Matemática. Asimismo, brindan la posibilidad de trabajar con los conocimientos espaciales y realizar experiencias como las relatadas más adelante, en las que el eje del trabajo es el conocimiento de un espacio geográfico y algunos aspectos sociales de la comunidad del paraje.

La propuesta siguiente es ejemplo para el **estudio y el análisis de mapas**; en ella encontramos una oportunidad para el estudio de mapas como forma de representación del espacio y de los aspectos convencionales implicados.

- La familia Aguirre, de la provincia de La Pampa, debe realizar un viaje en automóvil desde la localidad de General Pico hasta la localidad de General Acha.

Como es la primera vez que realizan ese recorrido, consultan el siguiente mapa:

a) ¿Qué información pueden obtener del mapa?

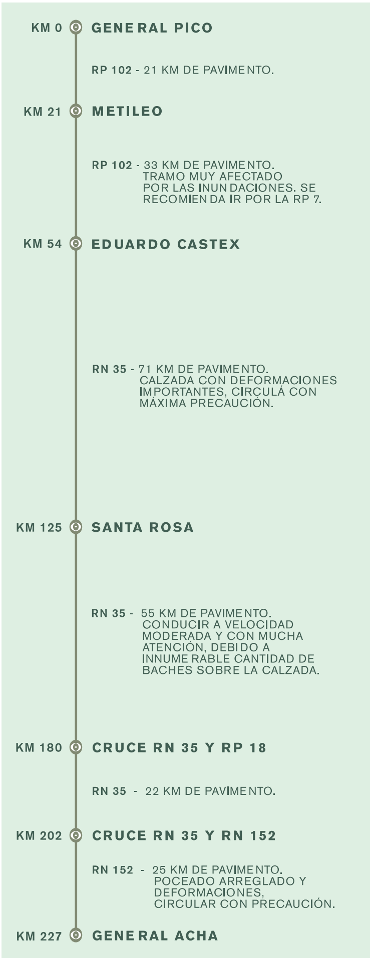
b) ¿Cuáles son las diferentes opciones que tiene la familia Aguirre para realizar el recorrido previsto?

Después de discutir en conjunto las características del mapa y algunas claves para su interpretación, podemos proponer que los alumnos, reunidos en distintos grupos, escriban las instrucciones para realizar diversos recorridos. Por ejemplo:

- El papá desea realizar la mayor parte del viaje circulando rutas nacionales. ¿Cuál sería un recorrido posible?
- La mamá desea pasar por la localidad de Santa Rosa para visitar a su hermana. ¿Por dónde puede ir?

Luego, los grupos intercambian las instrucciones y analizan y discuten si, una vez realizadas, llegaron sin dificultad a destino. En este debate es interesante focalizar la discusión en las referencias que utilizaron los alumnos para describir los caminos propuestos. Además de los números de rutas, tendremos en cuenta el sentido del movimiento y de los giros que se realicen.

Para comparar este mapa con otra forma de representar el mismo espacio, se puede presentar la siguiente hoja de ruta.



• Un amigo de la familia les sugirió que consultaran en Internet.[7] Allí encontraron esta hoja de ruta para obtener más información.

a) ¿Qué diferencias tiene esta hoja de ruta respecto del mapa que había consultado la familia anteriormente?

b) ¿Qué otros datos obtendrán del recorrido a partir de él?

[7] Un sitio de Internet donde se encuentran mapas como este es: www.ruta0.com/rutas_argentinas.asp

A partir de la resolución de problemas como el planteado, o de otros similares, y a través de una reflexión guiada, podemos esperar que los chicos se aproximen a reconocer que las representaciones seleccionadas, el mapa y la hoja de ruta, tienen algunos rasgos comunes, como el nombre de las localidades por las que se pasará durante todo el recorrido, y la señalización de rutas provinciales y nacionales. También podrán reconocer algunas diferencias entre el mapa y la hoja de ruta: por ejemplo esta última refiere kilómetros de recorrido entre localidad y localidad, es una representación lineal, y no permite visualizar la localización de las ciudades en el espacio geográfico.

Las dos propuestas que proponemos a continuación toman como eje de trabajo el avance en la **elaboración de croquis**. En un caso, partimos del plano de un espacio conocido para anticipar una distribución de objetos en el mismo y, en otro, partimos de un espacio amplio real, que debe ser visitado por personas que no lo conocen. En ambos casos, aparece la necesidad de establecer convenciones o de utilizar las establecidas y de elegir las referencias que serán representadas.

Es frecuente que en las instituciones educativas, año a año, se realicen eventos que convoquen a la comunidad escolar, tales como muestras de trabajos, ferias de ciencias, muestras de arte, actos escolares, reuniones de padres o encuentros en la biblioteca, etc. Estas circunstancias pueden brindar un contexto adecuado que otorgue sentido a la interpretación de un plano de un espacio conocido para los chicos, como la escuela y los sitios aledaños, y que el plano funcione como guía para llegar al ámbito en el que se desarrollará el evento.

Las siguientes actividades pueden proponerse en el marco de la organización de una feria que se realice en la escuela. Antes de presentar el problema ligado a los conocimientos espaciales, es posible discutir con los alumnos distintas cuestiones referidas al proyecto que, eventualmente, podría comprometer a más de un año/grado de la escuela. Por ejemplo, *¿cuáles son los lugares de la escuela aptos para la exposición?, ¿cuántos stands será necesario instalar?, ¿cuáles son las temáticas que se abordan en cada uno?, ¿alguna de ellas requiere de un espacio con condiciones particulares? (por ejemplo oscuridad, mucho espacio para desplazamientos de alumnos y/o personas), ¿todos los stands pueden ser ubicados en la escuela o será necesario recurrir a algún lugar cercano fuera de ella?, ¿es aconsejable seguir un determinado orden en la visita de los stands?* Estas son algunas de las cuestiones sobre las que podemos debatir con los niños y recolectar información para tomar decisiones.

Una pregunta que puede abrir pistas para proponer la elaboración de croquis y recorridos a partir del plano de la escuela y sus alrededores como una buena alternativa de comunicación de información es la siguiente: *¿qué instrumentos vamos a elegir para contar a los visitantes las características de la feria, su organización en el espacio y el modo de recorrerla?*

Una vez discutida la pregunta y elegido el ámbito para realizar la feria, que podrá ser, por ejemplo, el salón de actos o el patio, se les podrían proponer dos tareas: dibujar un croquis de la distribución de los stands de la feria sobre el plano del salón de actos (realizado por alumnos de otro grado o proporcionado por los adultos que lo tengan); indicar, sobre un plano de la escuela, cómo llegar a la feria y cómo recorrerla.

Decimos que los alumnos realizan un croquis de la distribución de *stands* y no un plano, porque probablemente lo harán respetando solo algunas relaciones de tamaño, pero sin tener en cuenta la escala.

Un posible ejemplo de consigna sería:

> • *Para la Feria de Ciencias que organiza la escuela este año, los alumnos de 4° serán los encargados de organizar la distribución de 8 stands en el salón de actos y de orientar en el recorrido de la feria a todas las personas que nos visitarán en esa oportunidad. Para eso, contarán con un plano de la escuela y otro del salón de actos.*
> *Ahora ustedes trabajarán en grupos de 4 alumnos y luego cada grupo mostrará su trabajo en una puesta en común para definir, entre todos los trabajos, cuáles son los que se adecuan al pedido.*

Hacer varios croquis en grupos y contrastarlos[8], argumentando las decisiones que se tomaron para su realización, puede ser un contexto interesante para debatir puntos de vista acerca del modo de representar los objetos en ese espacio próximo representado y los recorridos en el espacio más amplio de la escuela. Será una buena ocasión para elegir las propuestas que se consideren más "convenientes", explicitando los criterios para decidir esa conveniencia.

Otro ejemplo de **trabajo con croquis** es el que forma parte de una experiencia denominada "De la meseta al valle", realizada en la escuela N° 194 de Aguada Guzmán, en la provincia de Río Negro. En el marco del VI Encuentro Pedagógico que organiza la escuela del paraje, se invitó a varias escuelas de la localidad de

[8] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "La gestión de la clase", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo", de este *Cuaderno*.

General Roca[9] a participar del evento con el objetivo de que los alumnos que habitan el valle de Río Negro conozcan ese espacio geográfico, algunos aspectos sociales de la comunidad del paraje, localizado en la parte sur de la meseta de El Cuy.

Los visitantes fueron divididos en grupos de aproximadamente diez alumnos cada uno, para hacer una "Búsqueda del tesoro" y regresar a la escuela anfitriona con evidencias de haberlo hallado. La tarea de cada grupo fue realizar algunas de las consignas siguientes: describir el proceso de elaboración de hilo de lana, describir el proceso de esquila de oveja, juntar tres objetos pertenecientes a la cultura mapuche, juntar tres objetos pertenecientes a la cultura del gaucho, encontrar tres plantas autóctonas que se consideran medicinales, describir tres formas de obtener el agua en el paraje, encontrar muestras de tres festividades distintas, encontrar muestras de tres clases de suelo de la zona, encontrar tres por qué no hay policía, encontrar tres por qué no hay juzgado y buscar tres características de la sala de primeros auxilios. Para avanzar en la realización de su tarea, los grupos necesitaron un croquis del paraje para diseñar el recorrido que realizarían con el fin de resolver las consignas.

Consideremos por separado los tipos de problemas ligados a los conocimientos espaciales que debieron resolver los alumnos de la escuela anfitriona (en Aguada de Guzmán) y los de la escuela visitante (del valle).

Los alumnos de Aguada Guzmán elaboraron un croquis de su lugar y para ello fue necesario que previamente discutieran sobre:

- la necesidad de contar con puntos de referencia para realizar una representación orientadora con el fin de diseñar un recorrido por el lugar;
- cómo marcar en el croquis los elementos de referencia elegidos y si había necesidad de incluir alguna señalización adicional en el espacio real por ser insuficientes los elementos existentes.

Las discusiones llevaron a incluir en el croquis, a modo de datos, elementos ya existentes que fueron elegidos como referencias: los ríos o arroyos, las rutas y las calles, los edificios públicos, como la capilla, las canchitas, la comisión de fomento, la escuela, y otras construcciones, como el molino, el generador y la antena de teléfono. Asimismo, se encontraron con la necesidad de incluir, tanto en el croquis como en el espacio real, carteles con los datos de los vecinos que se podían consultar para recabar información.

[9] Las escuelas participantes fueron: la N° 133 de General Roca; la N° 57, de la localidad de Cervantes; la escuela Niño Jesús, de la localidad de Villa Regina y la N° 83, de Naupa Huen.

Los alumnos del valle recorrieron un espacio desconocido para ellos y con características geográficas muy diferentes a las que frecuentan, ayudados por representaciones de dicho espacio, que habían sido elaboradas por los alumnos del paraje, así como también de un croquis con señalizaciones que operaban como ayuda, y de dibujos de la casas de los lugareños.

Para realizar las tareas tuvieron que interpretar el croquis con sus referencias, buscar información de boca de los lugareños involucrados en el juego y organizar su recorrido utilizando el croquis, por ejemplo, para localizar la sala de primeros auxilios.

Otra propuesta para indagar el espacio geográfico es trabajar a partir de imágenes satelitales que ofrecen fotos del espacio que habitamos. Para esto, se puede consultar el sitio Web llamado *Google Earth*[10], que permite visualizar imágenes satelitales de cualquier punto del planeta. Su uso puede enriquecer el tratamiento de la interpretación de planos de espacios conocidos por los alumnos, simplemente ingresando el nombre de la localidad que se desea explorar. Por ejemplo, las líneas que marcan las divisiones políticas o los paralelos y meridianos aparecen en algunos mapas y en las fotos satelitales no. Asimismo, las imágenes que se visualizan en dicho programa permiten a los alumnos identificar las referencias del espacio que a ellos les resultan conocidas y buscar nuevos lugares, orientándose a partir de las mismas.

Para avanzar en el conocimiento de las figuras y los cuerpos geométricos

En el Segundo Ciclo proponemos continuar con lo planteado en *Cuadernos para el aula: Matemática 1, 2 y 3* en relación con el estudio de las figuras y los cuerpos geométricos. Esto es, profundizar el objetivo de brindar la oportunidad a los alumnos de desarrollar prácticas espaciales efectivas, como el plegado, la medición o la superposición, cuando se plantean actividades de reproducción, descripción, representación y construcción de formas. El sentido de estas actividades es avanzar desde el reconocimiento perceptivo de las formas o desde el uso implícito de una propiedad hacia la explicitación de las propiedades de los elementos de las figuras y de los cuerpos.

Este trabajo permite a los niños aprender las primeras propiedades geométricas de las figuras y los cuerpos, pues estas comienzan a ser percibidas en el transcurso de las tareas y pueden dar lugar a una reflexión posterior para reconocerlas. Asimismo, da lugar a la incorporación progresiva de un vocabulario específicamente geométrico. Las propiedades pueden referirse tanto a los elementos que caracterizan las formas (por ejemplo, tener lados rectos o curvos, tener o no una cara con forma de círculo) como a las relaciones entre ellos (por ejemplo, tener por lo menos un par de lados congruentes, tener caras laterales perpendiculares a las bases, etc.).

En 4° año/grado, además de sistematizar algunas de las propiedades ya exploradas durante el Primer Ciclo, recomendamos ampliar el universo de figuras y cuerpos conocidos, por ejemplo, incluyendo diferentes clases de triángulos

[10] Se recomienda colocar el nombre *Google Earth* en un buscador y bajar el programa en forma gratuita desde alguna de las páginas que allí aparecerán.

y diferentes clases de prismas rectos. También se pueden explorar nuevas propiedades, como la igualdad de lados y la perpendicularidad o no de los mismos, asociada o no a los ángulos rectos.

En relación con las situaciones en las que el alumno debe trabajar con figuras, comparándolas, describiéndolas, copiándolas, clasificándolas o construyéndolas, se pueden proponer consignas que incluyan la composición y descomposición de figuras conocidas para obtener otras, la utilización de diferentes materiales[11], como papel de calcar, cartones, papeles blancos o cuadriculados, varillas articuladas, hoja punteada, planchas de clavos, aumentando las ocasiones en que se utilice como soporte la hoja blanca.

En la medida de lo posible, avanzaremos hacia la caracterización de una figura por sus propiedades (el rectángulo es un cuadrilátero con 4 ángulos rectos y dos pares de lados iguales), considerando lo que tienen en común los diferentes dibujos de la misma.

En cuanto al uso de instrumentos de geometría podemos proponer situaciones que incluyan, además de la regla, ya conocida de años anteriores, el compás, para transportar segmentos o comprobar la congruencia de segmentos, y la escuadra, para construir o comprobar la presencia de ángulos rectos.

En 4° año/grado también esperamos promover un cambio en la forma de justificación del trabajo. En este sentido, no solo aceptaremos argumentaciones empíricas similares a las realizadas en el Primer Ciclo (comprobaciones o verificaciones realizadas por superposición o por plegado, etc.), sino que promoveremos que los alumnos comiencen a utilizar argumentaciones que incluyan las propiedades que van conociendo. Por ejemplo, los chicos ya podrían asegurar que al cortar un cuadrado por su diagonal quedan dos triángulos isósceles, porque *como el cuadrado tiene todos los lados iguales, entonces cada triángulo tiene dos lados iguales.*

Los problemas geométricos que resuelvan los alumnos darán lugar a discutir sobre distintos procedimientos de construcción, reconocer los usos posibles de los instrumentos de geometría, comenzar a diferenciar y caracterizar figuras y cuerpos geométricos por sus propiedades, y avanzar desde argumentaciones empíricas hacia otras basadas en propiedades.

[11] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Las representaciones” en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo”, de este *Cuaderno.*

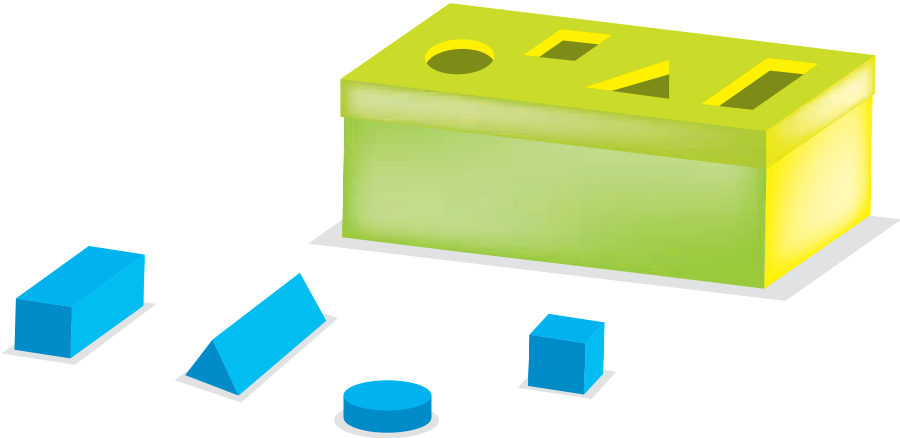
Plantear situaciones para comparar y describir figuras y cuerpos geométricos

En 4° año/grado las descripciones que los alumnos realicen al comparar figuras o cuerpos permitirán explicitar propiedades y, eventualmente, dar lugar a las primeras clasificaciones.

Cabe destacar aquí que no se trata de considerar la clasificación como puerta de entrada al conocimiento de los nombres y de los elementos de las figuras y los cuerpos. En cambio, esta es una oportunidad para establecer relaciones entre los diversos elementos de las figuras y de los cuerpos, y comenzar a reconocer varias figuras de una misma clase. Por ejemplo, si se presenta a los niños un conjunto de cuadrados, rombos y rectángulos podrán reconocer que todos son cuadriláteros que tienen todos o algunos lados iguales, o si se les presentan varios prismas, que todos son cuerpos cuyas caras laterales son rectángulos. Lo que interesa focalizar centralmente como contenido de enseñanza son las propiedades que caracterizan a cada una de las figuras y que las diferencian de otras.

Un tipo de actividades que da lugar a la comparación y a la descripción de figuras y cuerpos son aquellas en las que, dado un conjunto, hay que descubrir cuál es la figura o el cuerpo que alguien pensó. Se trata de ir haciendo preguntas que permitan ir descartando las figuras o los cuerpos que no son la o el pensado. Este tipo de actividades se vienen proponiendo desde 2° año/grado, pero en 4° se puede complejizar la tarea solicitando que los chicos descubran el cuerpo o la figura a partir del menor número de preguntas. Si se solicita que las preguntas que se hacen para adivinar se registren en forma escrita, es posible luego trabajar intensamente sobre ellas. De este modo, podremos discutir con los chicos qué preguntas resultan más efectivas para el descarte y cuáles son claras, según el modo de referirse a alguna de las características de las figuras o de cuerpos dados, y avanzar en el uso del vocabulario geométrico adecuado.

Otras actividades que podemos proponer para describir y/o comparar cuerpos son aquellas en las que los chicos deben establecer relaciones entre un conjunto de cuerpos y la forma de sus caras. Para esto, es necesario conseguir un conjunto de representaciones de cuerpos geométricos de madera o de acrílico que puede haber en la escuela. De lo contrario, conseguiremos cajitas de cartón con formas diferentes, por ejemplo las de remedios con forma de prisma, de base cuadrada o rectangular; las de tabletas con forma de cilindro, etcétera.



Se trata de proponer a los niños que fabriquen una “tapa con agujeros” para la caja grande, de modo que todas las cajitas puedan pasar y quedar dentro. Para esto, se colocan sobre el escritorio el conjunto de cajitas y una caja grande, como las de zapatos, se organiza la clase en grupos y se reparte a cada uno una hoja del mismo tamaño de la tapa de la caja grande. A continuación se puede dar una consigna como la siguiente, para que cada grupo trabaje solo:

> • Dibujen en la hoja las formas de los agujeros que tenemos que hacer en la tapa de la caja grande para que puedan pasar “justo” por ellos todas las cajitas. Decidan si cada cajita puede pasar por uno o más agujeros y expliquen por qué.

Al dibujar la forma de los agujeros, los chicos tendrán que anticipar lo que ocurriría si tuvieran que hacer pasar las cajitas por los agujeros, considerando las formas de las diferentes caras de los cuerpos y sus tamaños respectivos. Luego, en una puesta en común, se podrá discutir sobre las formas y los tamaños de los dibujos y las razones por las que los eligieron. Según la colección de cajitas o de cuerpos de la que se disponga, sería posible descubrir que, por ejemplo, un prisma de base cuadrada puede pasar por dos agujeros, uno de forma cuadrada y otro rectangular, pero un cubo sólo pasa por uno, y otro prisma rectangular podría pasar por tres orificios.

Con el mismo propósito de describir un cuerpo en función de las formas de sus caras, podemos proponer otra actividad con el mismo conjunto de cajitas de la actividad anterior. Se trata de asociar cada cuerpo con los dibujos del mismo, realizados desde diferentes puntos de vista.

Para esto, podemos colocar en el centro de cada grupo de 4 o 5 chicos una mesa con un cuerpo y dar una consigna como la siguiente: *Cada uno tiene que elegir la cara del cuerpo que tiene más cerca y dibujarla desde su lugar.* Luego, mostraremos las distintas imágenes de un mismo cuerpo al grupo de la clase para que elijan el cuerpo dibujado en cada caso y expliciten desde qué lugar se dibujó cada uno de los dibujos.

Para describir y/o comparar figuras, podemos proponer juegos en los que los chicos necesiten reconocer figuras por la clase a la que pertenecen o por la explicitación de alguna de sus propiedades geométricas, dadas por las relaciones entre sus elementos[12]. Por ejemplo:

> "Figuras con propiedades": identificar propiedades de las figuras.
> Materiales: cartas con distintas figuras (distintos triángulos y cuadriláteros) y tarjetas con distintas propiedades (por ej.: tiene cuatro lados iguales, tiene dos pares de lados iguales, tiene por lo menos dos ángulos rectos, etc.).
> Organización de la clase: se arman grupos de 4 alumnos cada uno.
> Desarrollo: por cada grupo se colocan dos pilas, una con las cartas con figuras y otra con tarjetas con propiedades en el centro de la mesa, boca abajo. Por turno, cada jugador levanta una carta y una tarjeta y determina si la figura cumple o no con la propiedad. En el primer caso, se lleva la carta de la figura y coloca la tarjeta con la propiedad al final de la pila de tarjetas. En el segundo caso, coloca ambas piezas al final de las pilas correspondientes.

A medida que se desarrollan las actividades de descripción y comparación, se pueden ir registrando en afiches o en carpetas las características necesarias y suficientes que han permitido reconocer y describir los cuerpos y las figuras sobre los que se ha trabajado.

Por ejemplo, si se ha trabajado con la construcción de "esqueletos" con varillas y bolitas de plastilina para los cuerpos:

Cuerpos redondos: no se pueden armar con varillas, no tienen caras planas.
Cuerpos poliedros: sí se pueden armar con varillas, tienen varias caras planas.
Prismas: tienen un par de caras paralelas e iguales.
Pirámides: tienen varias caras iguales que se juntan en una punta.
Conos: no se pueden armar con varillas, tienen una punta (cúspide) y un círculo.
Cilindro: tienen dos caras planas y otra curva.

Para proponer una actividad de **comparación de semejanzas y diferencias,** es importante seleccionar los cuerpos según las propiedades que deseemos trabajar. Por ejemplo, si apuntamos a la distinción de los poliedros y no

[12] **Recomendación de lectura:** véanse las propuestas de juegos de Chemello, G. (coord.), Hanfling, M. y Machiunas, V. (2001), *El juego como recurso para aprender. Juegos en Matemática EGB 2.* (Material para docentes y recortable para alumnos), Buenos Aires, Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, págs. 31 y 33.

poliedros, y en cada caso nos proponemos distinguir los prismas de las pirámides; y los conos de los cilindros y de las esferas, entonces los cuerpos que incluiremos serán prismas rectos de diferentes bases, incluyendo un cubo, pirámides rectas de diferentes bases, un cono, un cilindro y una esfera.

Colocando en el centro del aula diferentes cuerpos, uno de cada clase, podemos proponer consignas para resolver por grupos, por ejemplo:

- Agrupen los cuerpos por su parecido y expliquen por qué los juntaron de esa manera.
- Si los agrupo de esta manera (el docente muestra determinada forma de agruparlos), ¿dónde ubicarían este cuerpo? (muestra un cuerpo que no estaba incluido en la colección anterior).
- ¿Qué tendrían en cuenta para formar, con todos los cuerpos, solo dos grupos de cuerpos?

Si los chicos han realizado actividades de construcción de cuerpos con varillas y plastilina, como las propuestas en *Cuadernos para el aula: Matemática 3,* es probable que propongan criterios basados en tener o no aristas y en cuántas aristas tienen; por ejemplo: *Pusimos juntos los que se pueden armar con varillas y los que no, o bien: Agrupamos los que se pueden armar con varillas por el número de varillas que se necesitarían,* etc. Si no han realizado este tipo de actividades, seguramente podrán utilizar criterios ligados a otros elementos, como la forma de las caras: *Algunas tienen partes planas y otras redondas, o bien: Algunos terminan en punta (el cono y las pirámides) y otros no.*

En cualquier caso, una vez formados los grupos de cuerpos, puede ser interesante organizar grupos de alumnos y darle a cada grupo dos o tres cuerpos, planteando como consigna *Para cada cuerpo, en qué grupo los incorporarían y por qué.*

Ambas actividades permiten organizar una puesta en común, donde los chicos expliciten las propiedades que dan lugar a los grupos formados, comparen los elementos incluidos en los grupos en cada caso, y discutan si un mismo cuerpo puede pertenecer a más de uno de los grupos ya formados.

Plantear situaciones para construir figuras y armar cuerpos con distintos procedimientos

A continuación, presentamos una secuencia de actividades para trabajar sobre la **construcción de cuerpos** y su reconocimiento a partir de sus patrones o desarrollos planos. Se trata, para este año, de los cuerpos geométricos denominados *prismas de bases rectangulares y triangulares.*

Secuencia sobre prismas y desarrollos planos: "Armando y desarmando cajas"

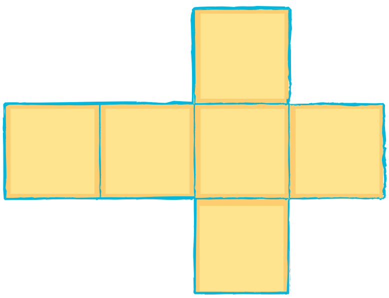
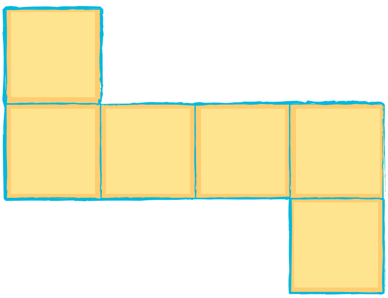
Esta secuencia de actividades es una continuación de la planteada en *Cuadernos para el aula: Matemática 3*, "Forrando cajas". Es necesario aclarar que si en 3er año/grado no se ha realizado un trabajo equivalente al allí planteado, es conveniente hacerlo antes de realizar la secuencia aquí propuesta.

Actividad 1

Organización del grupo: se divide la clase en cuatro o cinco grupos.
Materiales: a cada grupo se le entrega cartulina, cinta adhesiva, tijera. Sobre el escritorio se coloca un cubo de 6 cm de arista y un prisma de base cuadrada de 6 x 6 x 9 cm, construidos ambos con cartulina.
Desarrollo: el docente plantea a los chicos que *tienen que construir los mismos cuerpos en cartulina, pero tratando de tener que pegar lo menos posible y de usar poca cinta adhesiva, porque deforma el cuerpo.*

Es muy probable que los chicos recorten las cuatro caras unidas y las dos bases por separado. En este caso, intervendremos en los grupos para ayudarlos a pensar una forma que exija utilizar menos cinta adhesiva, hasta que surjan los desarrollos planos.

Una vez que los grupos han logrado construir los cuerpos, realizamos una puesta en común para la que cada grupo desarma el cuerpo construido, mostrando su desarrollo plano. Estos, así desarmados, se pegan sobre afiches bajo el título "Desarrollos planos del cubo" y "Desarrollos planos de un prisma de base cuadrada", respectivamente. En el intercambio, se discute sobre las semejanzas y las diferencias de los patrones obtenidos. Por ejemplo, los niños podrán explicitar: *Estos dos están formados por 6 cuadrados iguales, 4 forman una tira y los otros están unidos de forma distinta.*

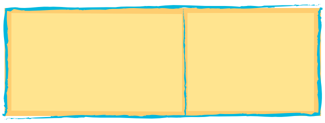



Esta actividad permite volver a poner en juego el reconocimiento del número y la forma de las caras de algunos prismas, así como comenzar a construir la noción de desarrollo plano de prismas de base rectangular.

Actividad 2[13]

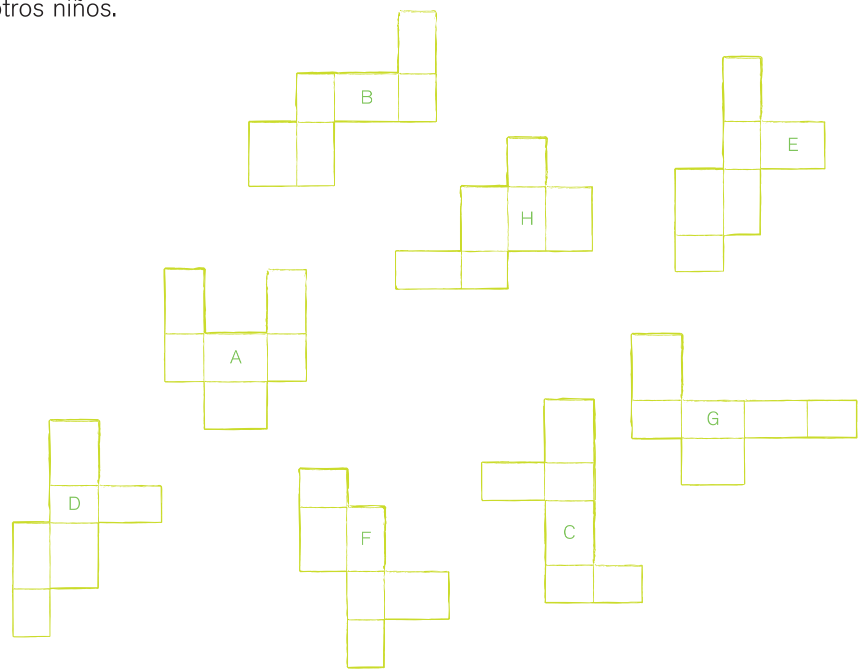
Se organiza la clase en parejas y se les plantea el siguiente problema:

• Para armar una caja de tapas rectangulares, se quiere hacer un ensamblado plegando y pegando. Las medidas de sus aristas deben ser: 3,5 cm, 6 cm y 4,5 cm. Para hacerlo, ya se ensamblaron dos caras laterales así:



• Propongan una forma de completar el desarrollo plano con las caras que faltan y dibujen la tapa de la caja.

A continuación, se indican los desarrollos que pueden aparecer. Los que surjan espontáneamente del grupo, se recortan y se pegan en la pizarra, y aquellos que no surjan de los alumnos los agregaremos, aclarando que fueron realizados por otros niños.



[13] Basada en actividades propuestas en Colomb, J. y Perrot, G. (1984), *Math HEBDO CM1*, París, Classiques Hachette.

Se propone, entonces, el debate sobre cuáles son los desarrollos planos que permiten armar una caja. Para resolver esta actividad, los chicos hacen anticipaciones acerca de la forma de ensamble de las caras de un prisma y solo estará permitido armar efectivamente la caja en aquellos casos en que el grupo no se convence mediante argumentos.

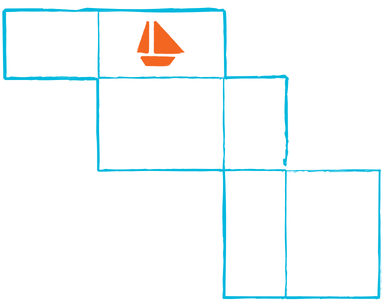
Actividad 3

Materiales: doce cubos de 4 x 4 x 4 cm. Seis de cartulina blanca y seis con dos caras azules, dos rojas y dos blancas. Los colores se combinan de diferentes formas, de tal modo que los 6 cubos sean distintos. Por ejemplo, uno de los cubos tiene las dos caras azules opuestas, las amarillas opuestas y las blancas opuestas; en cambio, otro no tiene ningún par de caras opuestas del mismo color.
Organización de la clase: se divide la clase en un número par de grupos. A su vez, cada grupo se vuelve a subdividir en dos subgrupos entre los cuales se va a plantear una situación de comunicación. Es conveniente que cada subgrupo tenga entre 2 y 3 participantes. A cada subgrupo se le entrega un cubo blanco y otro con caras coloreadas, que el subgrupo pareja no debe ver. La consigna podría ser: *Cada subgrupo debe enviar un desarrollo del cubo que permita al subgrupo pareja pintar el cubo blanco igual al cubo de colores que ustedes tienen. Cuando cada subgrupo envió el dibujo y pintó su cubo a partir del dibujo recibido, pueden reunirse y verificar si el cubo que han pintado es el mismo que el de su pareja.*

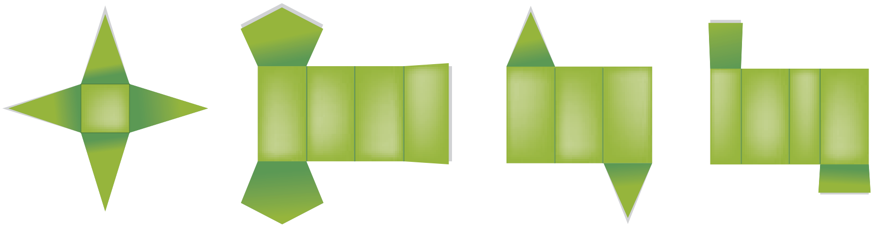
La realización de esta actividad permite plantear anticipaciones y discutir fundamentalmente sobre la organización de las caras de un cubo. Por ser un cubo, no es posible apoyarse en la forma de las caras para informar sobre la organización, lo que obliga a controlar cómo se unirán las caras al conformar el cubo.

Las actividades siguientes, si bien no forman parte de la secuencia, se pueden presentar una vez realizada la misma, para que los chicos resuelvan individualmente, poniendo en juego los conocimientos adquiridos a partir de lo que trabajaron en la secuencia.

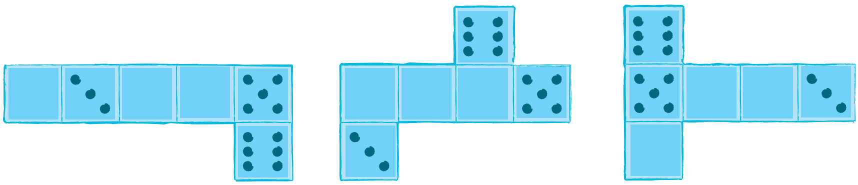
- Natalia hace una caja decorada con dibujos iguales en las caras laterales. La tapa y la base las deja en blanco. Para armar la caja, realiza el desarrollo plano, como se muestra a continuación. Completá el decorado.



• Sabiendo que con algunos de estos dibujos no se pueden armar cuerpos, respondé.
a) ¿Con cuáles no se puede y por qué?
b) ¿Qué cuerpos de los que hay en la caja de materiales se pueden armar con los que sí son desarrollos planos?



• ¿Con cuáles de estos desarrollos planos podrías armar un dado? En los que sea posible, marcá cómo quedarían distribuidos los puntos que corresponden a cada cara teniendo en cuenta que las caras opuestas suman 7.



Con respecto a la **construcción de figuras,** podemos continuar proponiendo situaciones donde se dan diferentes informaciones sobre la figura que se quiere construir.

Por ejemplo, es posible proponer, como en 3er año/grado, la reproducción de una figura dada, pero en este grado incluiremos figuras más complejas, cambiando el tipo de papel y agregando el uso de instrumentos de geometría no utilizados en el año/grado anterior. La idea es que estos cambios permitan avanzar en la identificación de nuevas propiedades y en los procedimientos de construcción.

En 4° año/grado proponemos que las actividades de reproducción incluyan circunferencias, cuadriláteros y triángulos. Al dar la consigna, solo ofreceremos el dibujo que se tiene que reproducir, sin agregar información extra y, después de que los chicos hicieron la copia o reproducción de la figura, promoveremos la discusión acerca de qué información tuvieron en cuenta para hacerlo.

Tanto para el caso de completar guardas, en las que debe copiar varias veces el mismo modelo, como en el caso de copiarlo una única vez, podemos proponer la actividad elegida en función de la necesidad de dibujar, por ejemplo, guardas, distintivos, logos o carteles.

La necesidad de dibujar guardas puede surgir de la intervención en un proyecto de toda la escuela, como una competencia deportiva, una Feria de Ciencias u otras actividades.
Asimismo, se podrán explorar los motivos de las guardas elaboradas por distintos pueblos indígenas en mantas y vasijas, analizando las figuras que intervienen, articulando el trabajo matemático con el de Educación Artística.

Por ejemplo:

• Continuá cada una de las siguientes guardas hasta completarlas.

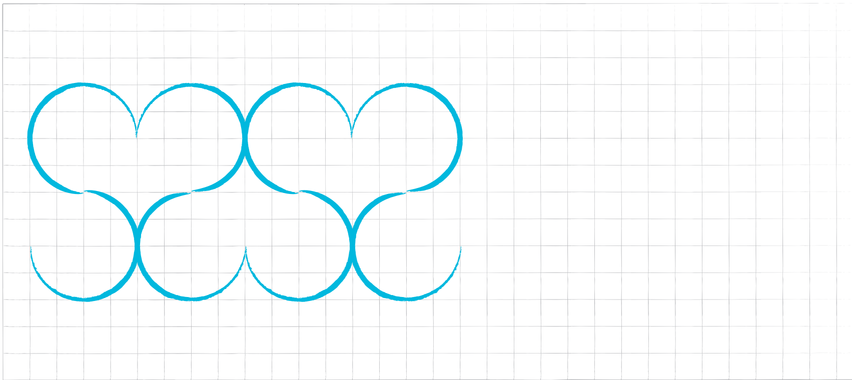


Figura A

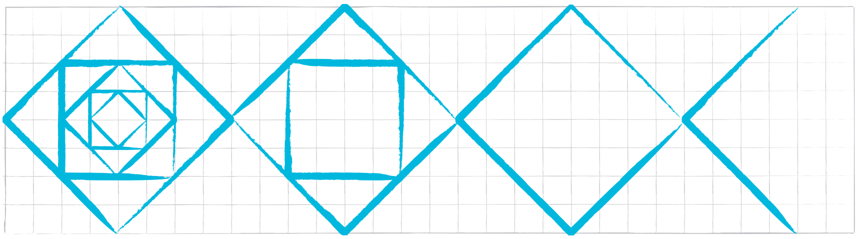


Figura B

La reflexión sobre el completamiento de la guarda de la figura A permite discutir sobre la igualdad de las circunferencias por su radio y las posiciones de las mismas por sus centros. En tanto que la guarda de la figura B propicia la discusión sobre la caracterización de los cuadriláteros por los ángulos rectos, la igualdad de los lados, la construcción de ciertas figuras a partir de la determinación de los puntos medios y la construcción de ángulos rectos, y de la mitad de un recto sobre una hoja cuadriculada.

La siguiente es otra actividad de copia que puede resultar interesante, pues los chicos podrán reconocer que, en ciertas figuras, es posible trazar líneas adicionales para facilitar la construcción, descomponiéndola en otras para las que ya se conoce algún procedimiento.

De este modo, se estará agregando información a la proporcionada inicialmente, pero sin que esto cambie la figura que resulta.

• Copiá los siguientes dibujos en una hoja lisa, utilizando compás, una regla sin números y la "escuadra casera". ¿Cuál te resultó más sencilla? ¿Por qué?

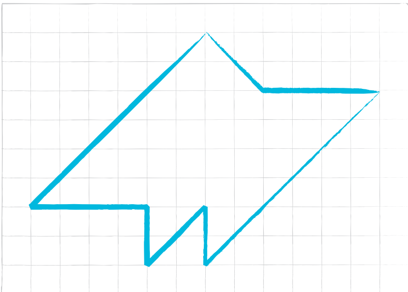


Figura C1

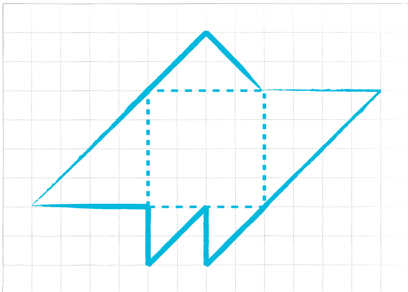


Figura C2

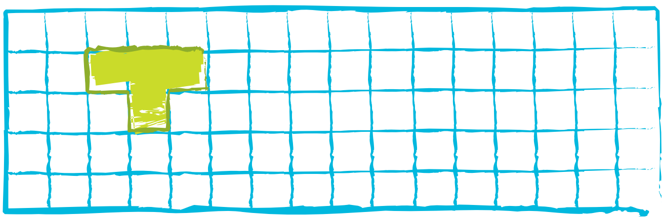
Estas reproducciones permiten discutir acerca de cómo transportar segmentos con compás y cómo transportar ciertos ángulos con la "escuadra casera", en particular si la abertura es de 45° (1/2 recto). La escuadra casera, tal como se explicó en el *Cuaderno para el aula 3*, se obtiene haciendo dos dobleces en un papel: doblando primero de cualquier modo para marcar una línea y luego haciendo coincidir los bordes determinados por la línea. También se podrá discutir sobre las propiedades de las figuras que componen cada modelo, los ángulos rectos o no y la igualdad o desigualdad de los lados. Al finalizar la copia de ambas figuras se podrá discutir también sobre por qué la segunda resultó más fácil que la primera concluyendo que, en algunos casos, puede ser conveniente trazar ciertas líneas adicionales que facilitan la copia.

Otras actividades que permiten construir figuras son aquellas en las que la información se da en un texto escrito. En el ejemplo siguiente, se da la condición que debe cumplir la figura a construir en relación con otra.

• En el geoplano o plancha de clavos.
a) Armá un triángulo que con solo un movimiento de la gomita se forme un cuadrado.
¿Cómo es ese triángulo?
b) Carlitos dice que él lo hizo con un triángulo, pero no le salió. ¿Qué le pudo haber pasado?

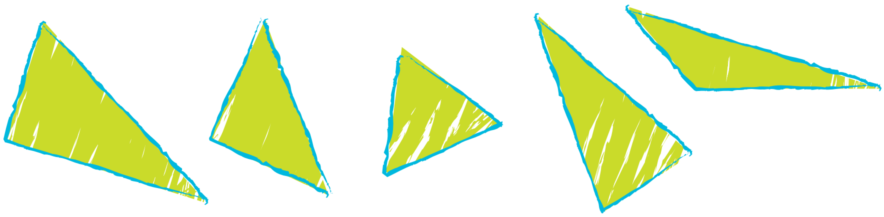
• En la hoja punteada:
a) Juan dibujó un triángulo con vértices A, B, y C en una hoja de manera que al agregar un cuarto punto D, pudo unir los cuatro puntos y formó un cuadrado. ¿Cómo puso los puntos?
b) ¿Es posible hacerlo con cualquier triángulo? ¿Por qué?

También es posible proponer actividades de construcción de figuras en las que hay que partir de otras figuras. Por ejemplo, armar cuadrados a partir de un patrón con ángulos rectos o a partir de triángulos:



• Usando varias figuras como la dibujada:
a) ¿Es posible armar un cuadrado de 4 x 4 cuadraditos?
b) ¿Y un cuadrado de 6 x 6 cuadraditos?

• Con triángulos como los siguientes:



a) Marcá con una cruz los triángulos con los que podés armar cuadrados y explicá por qué los marcaste.
b) Verificá tu respuesta calcando y recortando la cantidad de triángulos que necesites para armar los cuadrados.

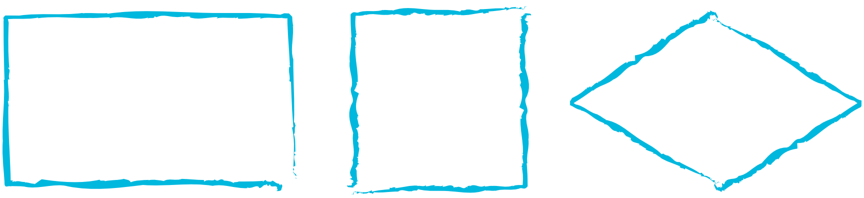
Al resolver estas propuestas, los chicos tendrán que "usar" las propiedades de las figuras utilizadas. En la puesta común o al justificar las respuestas, es probable que dichas propiedades sean explicitadas, por ejemplo: *Necesito juntar dos triángulos isósceles para obtener los cuatro lados iguales del cuadrado, o bien: Los triángulos tienen que tener un ángulo recto.*

Secuencia sobre propiedades de triángulos y cuadriláteros: "Armando y desarmando figuras"

Otra posibilidad es que propongamos la obtención de triángulos a partir de diferentes cuadriláteros y nuevos cuadriláteros a partir de triángulos. Para ello, podemos plantear una secuencia de actividades como la siguiente.

Actividad 1

Se entrega a cada grupo de alumnos una hoja en la que se ha dibujado un rectángulo de 6 cm por 10 cm, un cuadrado de 6 cm por 6 cm y un rombo con diagonales de 10 y 6 cm.



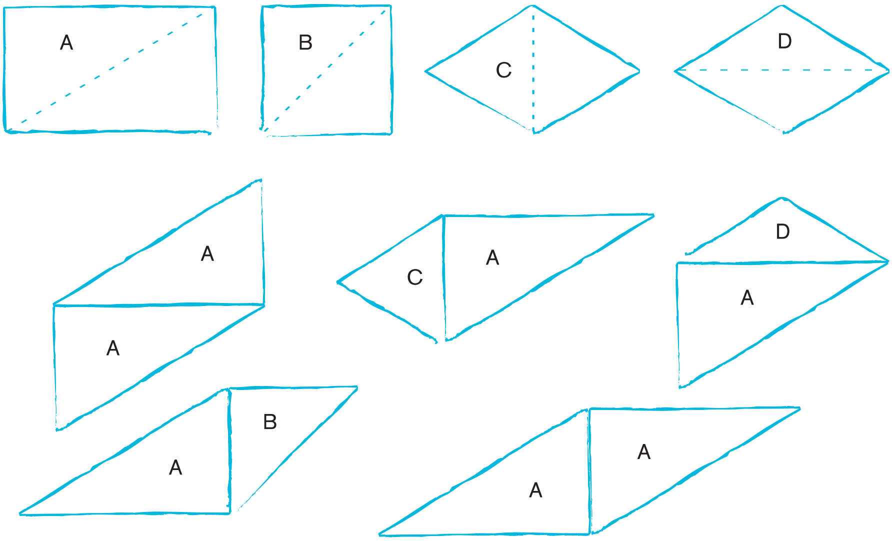
Luego, presentaremos una consigna como la siguiente:
Propongan formas de recortar cada cuadrilátero en dos triángulos iguales.

Una vez realizada esta tarea, tendremos que discutir con toda la clase cómo justificar las propuestas y aceptarlas como válidas, es decir, comprobar que en los dos primeros casos hay una única posibilidad: al cortar el rectángulo o el cuadrado por cualquiera de sus dos diagonales, se obtienen triángulos iguales, y que con el rombo se pueden obtener dos tipos de triángulos: al cortar el rombo por una diagonal, se obtienen triángulos distintos a los que quedan formados si se cortan por la otra diagonal.

Actividad 2

Se propone copiar varias veces los cuadriláteros y recortar en cada caso, como se ha propuesto en la actividad anterior, con el fin de preparar el material para resolver la siguiente consigna:
- *Con los triángulos obtenidos de la actividad anterior armá diferentes cuadriláteros, uniendo dos de ellos.*

Los chicos podrán armar, entre otros, cuadriláteros como los siguientes:



En este caso, la justificación que hagan los chicos del tipo de cuadriláteros que se obtienen podrá relacionarse con la congruencia o no de lados, la presencia de ángulos rectos, etcétera.

Actividad 3

Podemos plantear que agrupen las distintas figuras obtenidas, teniendo en cuenta algunas características comunes de sus elementos (lados iguales, un ángulo recto, etc.) y que mencionen las relaciones que se puedan establecer entre sus elementos (solo un par de lados paralelos, lados consecutivos iguales, etcétera).

En esta actividad, al discutir las agrupaciones producidas por los chicos, es posible avanzar sobre la diferenciación entre dibujo y figura. En efecto, si bien la tarea de agrupar se plantea sobre dibujos particulares de los cuadriláteros obtenidos por ellos, en la puesta en común se podría preguntar si se pueden hacer otros dibujos de las mismas clases, pero distintos de los que ya se tienen. Es decir, que conserven las propiedades, pero que no puedan superponerse con los anteriores, por ejemplo rectángulos con otras medidas de sus lados.

Los conocimientos trabajados en las tres actividades anteriores podrán ser utilizados por los chicos nuevamente para, esta vez, elaborar un mensaje, como se propone en esta actividad.

Actividad 4

Los chicos deberán seleccionar cuál es la información “necesaria” (que no puede faltar) para dar la descripción de una figura y, por lo tanto, cuál o cuáles son las propiedades que la caracterizan. La consigna podría ser: *Elegí uno de los cuadriláteros o triángulos que armaste y elaborá un mensaje que permita que otro compañero arme la misma figura.*

El trabajo planteado en la secuencia anterior de anticipar y realizar la descomposición y composición de los cuadriláteros en triángulos, relacionando las clases de triángulos con las clases de cuadriláteros, permite reconocer las propiedades de ángulos y lados que identifican a las diferentes clases de cuadriláteros. Además, prepara el camino para que, más adelante, reconozcan los cuadriláteros también por sus diagonales. Dividir convenientemente una figura en triángulos permitirá, a futuro, resolver muchísimos problemas geométricos, por ejemplo justificar propiedades de una figura utilizando las propiedades de los triángulos.

También es interesante que planteemos actividades donde se da información que permite construir varias figuras, indagando luego sobre la información que es necesario agregar para que la construcción dé lugar a una única figura. Por ejemplo, podemos proponer la construcción de triángulos y cuadriláteros con varillas, dando información sobre sus lados.

Para ello, es posible trabajar con sorbetes y pequeñas bolitas de plastilina o con varillas de cartulina agujereadas en las puntas, de tal forma que permitan articularse con ganchitos mariposa. Las varillas pueden ser de 10 cm, 15 cm, 5 cm y 20 cm, y se arman varias de cada una de las longitudes. Cada grupo de alumnos tiene un juego de varillas como el descrito y se proponen diferentes consignas, por ejemplo:

• Construyan cuadriláteros con cuatro varillas iguales.
a) ¿Qué cuadriláteros obtienen? ¿Por qué?
b) Si arman un cuadrilátero con cuatro varillas iguales, ¿qué tendrían que hacer para asegurar que sea un cuadrado?
c) ¿Qué varillas elegirían para armar un rectángulo?
d) ¿Es suficiente elegir las varillas para que la construcción que se obtiene sea un rectángulo? ¿Por qué?

• Armen distintos triángulos isósceles.
a) ¿Qué tienen de diferente entre sí?
b) ¿Es cierto que siempre con tres varillas se puede armar un triángulo? ¿Por qué?

La discusión sobre las respuestas dadas a las preguntas b), c) y d) permite hacer hincapié sobre las propiedades que son comunes a dos tipos de cuadriláteros (rombo y cuadrado en un caso, rectángulo y paralelogramo propiamente dicho, en el otro) y las que los diferencian. En cuanto a las preguntas de la consigna sobre las propiedades de los triángulos, además de focalizar los diferentes tipos de triángulos isósceles, comienzan a plantear el estudio de la posibilidad de construcción de un triángulo a partir de tres segmentos.

En el desarrollo de las actividades de construcción propuestas sugerimos[14]:

- propiciar la anticipación de las acciones, justificar el resultado de las acciones por argumentos y luego verificar con la acción efectiva, o sea construyendo;
- luego de describir, cuando sea pertinente, los pasos seguidos para construir o armar la figura, identificar los procedimiento más seguros, los más económicos, es decir, aquellos que se realizan con menos pasos;
- solicitar que justifiquen por qué pueden asegurar que han obtenido tal o cual figura;
- realizar las descripciones obtenidas en forma oral y/o escrita, remarcando el uso del vocabulario geométrico adecuado y, en el caso del registro escrito, la necesidad de nombrar a las figuras por sus vértices.

Presentamos ahora otras actividades del mismo tipo que la actividad 4 de la secuencia anterior, en las que, como hemos planteado, se pone en juego cuáles son los datos necesarios para construir una figura cuando se trata de interpretar y producir instrucciones. Por ejemplo:

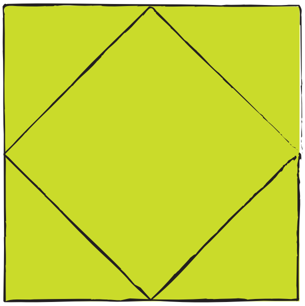
> • Seguí las instrucciones utilizando compás, escuadra y regla:
> 1) Trazá un cuadrado ABCD de 3 cm de lado.
> 2) Trazá una circunferencia de 3 cm de lado con centro en A.
> 3) Repetí el paso 2 con centro en B, en C y en D.
> 4) Marcá los puntos de intersección de las circunferencias que son exteriores al cuadrado.
> 5) Uní esos puntos.

En este caso, la tarea consiste en interpretar cada uno de los pasos de la construcción y ejecutarlos. También será interesante discutir con los chicos si es posible o no asegurar qué tipo de figura se obtiene al unir los puntos.

[14] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “La gestión de la clase”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno.*

Otro ejemplo es el siguiente:

• Escribí las instrucciones para que un compañero logre realizar la siguiente figura, formada por dos cuadrados.



Esta actividad puede dar lugar a diferentes procedimientos de construcción, según cuáles sean las propiedades que se consideren y los instrumentos que se utilicen. Por ejemplo, se podría comenzar construyendo el cuadrado grande con regla graduada y escuadra, considerando que sus lados son congruentes y sus ángulos rectos. Para obtener los vértices del cuadrado chico hay que marcar los puntos medios de los lados del cuadrado grande, midiendo con la regla graduada, o tomando con el compás una medida igual a la mitad, y marcar arcos sobre los lados con centro en cada vértice. Por otra parte, a fin de mejorar la claridad y la precisión del mensaje, se podrá discutir sobre la conveniencia de nombrar con letras los vértices de los cuadrados.

La medición de los lados de las figuras, así como la de la amplitud de los ángulos en las construcciones, tiene el sentido de obtener dibujos de figuras que puedan superponerse, pero básicamente la idea es que los dibujos representen las propiedades geométricas que se piensan. Si el propósito es hacer hincapié en la precisión de las mediciones, se podría plantear un mayor ajuste entre la figura a construir y la efectivamente construida.

Plantear situaciones para sistematizar propiedades de las figuras y los cuerpos

A partir de las actividades anteriores es posible registrar, en carpetas y afiches, las descripciones, las justificaciones, las conclusiones, etc. relacionadas con las propiedades de las figuras y los cuerpos que estamos estudiando. Estas propiedades pudieron funcionar como definiciones implícitas o tal vez han sido presentadas informalmente en las diferentes conclusiones y cierres realizados en el Primer Ciclo, pero a partir de 4º año/grado es necesario comenzar a formalizarlas y sistematizarlas. Si bien este trabajo es el que se viene haciendo cuando se realizan los registros correspondientes, hay situaciones de enseñanza que hacen hincapié en este aspecto.

Las actividades que presentamos a continuación tienen en común que aluden al uso explícito de las propiedades que definen los cuerpos y las figuras que estamos estudiando. En algunos casos, estas propiedades se utilizarán para justificar la verdad o falsedad de ciertas afirmaciones.[15] En otros casos, las propiedades se emplean para identificar y definir una figura o un cuerpo determinado. Los registros de las conclusiones realizados en las actividades anteriores podrían usarse tanto para resolver las actividades como para, una vez finalizada cada actividad, comparar las respuestas.

Para la realización de la primera consigna de la siguiente actividad, podemos presentar, sobre el escritorio, por ejemplo una pirámide de base cuadrada, otra de base triangular, un cilindro y dos prismas de base diferente.

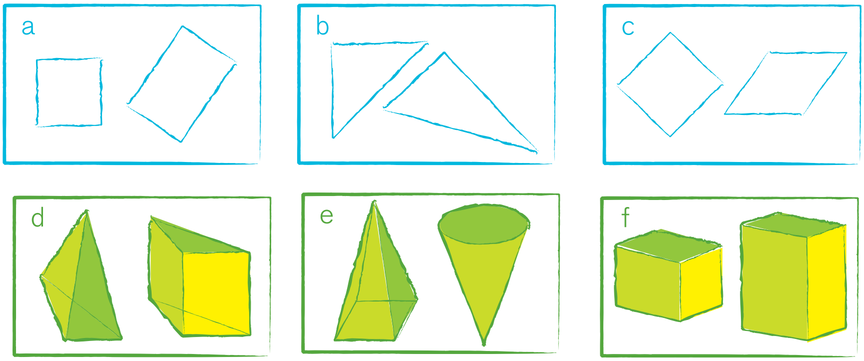
• Elegí un cuerpo de los que están colocados sobre el escritorio.
a) escribí cuáles de los siguientes datos corresponden al cuerpo geométrico que elegiste. Agregá otros datos que correspondan.
- Tiene cuatro caras.
- Algunas caras son triángulos.
- Tiene cinco vértices.
- Tiene cinco aristas.
- Una cara es un círculo.
b) Entregá tu escrito a un compañero y comprobá si a partir de esos datos él selecciona el mismo cuerpo.

• Discutí con un compañero si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
- Los cuadrados tienen cuatro ángulos rectos.
- Con cuatro varillas iguales puedo construir un cuadrado.
- Con tres varillas puede pasar que no pueda armar un triángulo.
- Con tres varillas distintas puedo armar un rectángulo.
- Hay cuerpos que no tienen aristas.
- Un prisma puede tener cuatro caras que son triángulos.

[15] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Las situaciones de enseñanza”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno.*

• Contestá por escrito a las siguientes preguntas.
a) ¿Hay cuerpos que tienen todas sus caras triangulares? ¿Cuáles?
b) ¿Hay cuerpos que tienen todas sus caras cuadradas ¿Cuáles?
c) ¿Qué cuerpo tiene cuatro vértices? ¿Y cinco? ¿Y seis?

• Escribí qué tienen en común y qué tienen de diferente los siguientes pares de figuras y/o cuerpos.



Para resolver las propuestas presentadas en los apartados anteriores, "Plantear situaciones para comparar y describir figuras y cuerpos geométricos" y "Plantear situaciones para construir figuras y armar cuerpos con distintos procedimientos", los alumnos tienen que reconocer y usar las propiedades de las figuras y de los cuerpos. Por eso, es muy importante que alternemos este trabajo con propuestas en las que el propósito sea sistematizar algunas de las propiedades utilizadas.

Estas actividades pueden requerir de los alumnos que seleccionen datos, juzguen la veracidad de afirmaciones, respondan a preguntas o bien determinen semejanzas y diferencias. En la puesta común de las producciones, los chicos podrían argumentar sobre la validez de las mismas, y esto dará lugar a que necesiten usar un vocabulario específico para facilitar la comunicación.

Para medir y calcular medidas

El estudio de las magnitudes y de su medición ha constituido y constituye una parte imprescindible del programa de los primeros años de la escolaridad, fundamentalmente por la necesidad y el reconocimiento que tiene la práctica de la medida como conocimiento de base para el desenvolvimiento social de los sujetos.

Generalmente, el aprendizaje de estos conceptos se identifica con el dominio y conocimiento de los distintos sistemas de unidades que componen el Sistema Métrico Decimal y los propósitos de su enseñanza se consideran alcanzados cuando los alumnos pueden efectuar pasajes de una unidad a otra con rapidez y seguridad. Sin embargo, a pesar del tiempo y de la dedicación que habitualmente se invierten en estas tareas, es bastante frecuente encontrar niños con escolaridad avanzada, y también muchos adultos, con importantes dificultades en relación con estas nociones y, aun más, con poco o ningún sentido de la estimación en relación con las mismas.

Medir es un acto complejo y difícil que responde a la necesidad de cuantificar ciertos atributos de los objetos y de las formas. Muchos de los problemas vinculados con la medición contribuyen a dar sentido a los números racionales y funcionan como articuladores entre la aritmética y la geometría.

Pero también existe una problemática específica que la escuela debe tratar, puesto que *"Comprender la medida implica comprender el proceso de medir, la inexactitud de los resultados, el concepto de error de medición y a qué puede ser atribuible, y la importancia en la selección de la unidad y del instrumento adecuado para lograr la precisión requerida por la situación planteada."*[16]

En el Segundo Ciclo, la idea es seguir enfrentando a los niños con problemas reales de medición para ayudarlos a construir una representación interna del significado de cada una de las magnitudes que se estudian y elaborar una apreciación de los diferentes órdenes de cada magnitud (por ejemplo, *¿Cuánto es 1 m, 1 kg, 1 l, etc.?).*

Estos problemas nos dan la oportunidad para debatir en el aula sobre el uso de los sentidos para determinar medidas o compararlas; el carácter de la unidad de medida y la importancia de su determinación, ya que medir es comparar con una unidad, por lo tanto el resultado de la medición depende de la unidad elegida; los errores cometidos en la medición debido a los procedimientos empleados o a la elección de la unidad; la imposibilidad de realizar mediciones exactas, pero la posibilidad de avanzar en la precisión de la medida; el funcionamiento del instrumento de medición y su adecuación al objeto a medir; los errores de apreciación de las cantidades; el rol de la aproximación y el encuadramiento según el tipo de medida y el uso que de ella se haga; los cambios de unidades y la relación que existe entre las transformaciones de la unidad y las medidas correspondientes. Cabe recordar que si la unidad usada es la mitad que la usada anteriormente, la medida será el doble; y si el mismo objeto mide, con una cierta unidad, una cantidad determinada y con otra unidad la tercera parte, es porque esta segunda unidad es tres veces mayor que la primera.

[16] Bressan, A. (coordinadora) (1995), *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica,* Buenos Aires, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

Estos problemas también brindan la posibilidad de efectuar cálculos simples de medidas y expresar el resultado de una medición de un cálculo o de una estimación de manera apropiada, es decir habrá que emplear unidades adecuadas y, según el caso, utilizar una expresión compuesta, una escritura racional o un encuadramiento.

En las siguientes propuestas, se desarrollarán ejemplos para el tratamiento de las medidas de peso, capacidad, longitud y tiempo.[17]

Plantear situaciones para estimar, medir y expresar cantidades

Las situaciones de estimación, muchas veces, permiten resolver un problema de medida cuando solo involucra comparaciones cualitativas o cuando no se requiere de demasiada precisión. En muchas oportunidades, no se necesita conocer de manera precisa la medida de un objeto, basta con dar encuadres (está entre tanto y tanto) o aproximaciones (alrededor de). Pero esta tarea requiere, para su desarrollo, prácticas de estimación en las que el error cometido vaya disminuyendo a la vez que se conforma un repertorio de distintos referentes.

Otras situaciones sólo exigen poner en funcionamiento procedimientos de comparación directa entre objetos para ordenarlos según una magnitud. Por ejemplo, si los chicos no se dan cuenta, con la mirada, cuál de dos recipientes tiene mayor capacidad, pueden responder el interrogante con solo verter el contenido de uno en el otro y analizar si sobra o falta. Pero si deben responder cuánto, más o menos, contiene uno en relación con el otro, el acto de medir se vuelve necesario. Si sopesando no pueden darse cuenta de cuál de dos objetos es el más pesado, la balanza de platillos puede resolver el problema..., pero no podrán responder: *¿qué diferencia de peso guardan?* Esto exigiría incorporar y usar pesas, es decir, cuantificar el peso de los objetos.
También hay oportunidades en las que no es posible realizar comparaciones directas a causa de la lejanía de los objetos. En este caso, se impone el uso de objetos que actúen como intermediarios o el uso de unidades e instrumentos de medición.

Las situaciones que se describen a continuación buscan promover el análisis sobre la elección de la unidad, el carácter arbitrario o no de la misma, su adecuación al objeto que se desea medir y el grado de precisión con que se realiza la medición. También permiten establecer relaciones entre las unidades utilizadas y las medidas obtenidas.

[17] **Recomendación de lectura:** para consultar actividades sobre enseñanza de la medida ver Ponce, H. (2000) Cap. 1 y 2 en *Enseñar y aprender Matemática. Propuestas para el Segundo Ciclo,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

Dentro del repertorio de actividades de medición efectiva que se realizan en las aulas no es frecuente que se incluyan situaciones que involucren la comparación de pesos, ya que no siempre se cuenta con una balanza. Tradicionalmente, en la escuela primaria se realizan algunas comparaciones cualitativas y mediciones con unidades no convencionales para la longitud. En tanto que el estudio de la capacidad y el peso se abordan, muchas veces, desde propuestas que no ponen en juego las mediciones efectivas. Sin embargo, y a pesar de alguna complejidad en la gestión de la clase, es interesante incluir algunas experiencias al respecto, puesto que haber realizado anticipaciones y comprobaciones efectivas para la longitud no es suficiente para extender lo aprendido a otras magnitudes.

Por otra parte, muchas veces se inicia el trabajo con el uso de unidades no convencionales, intentando recuperar de algún modo el proceso histórico, pero se descuida que los niños ya conocen y usan las unidades convencionales. En este sentido, y si bien es importante diferenciar los distintos tipos de unidades, es importante que presentemos situaciones donde se requiera realizar mediciones, evaluar con qué instrumentos se cuenta y cuál es el tipo de información que puede obtenerse.

Por ejemplo, en algunos textos escolares se propone, para el caso de la longitud, *medir el largo del banco o de un libro, usando gomas o lápices* con el propósito de descubrir que las medidas obtenidas son distintas y la convención resulta necesaria. En este caso, cabría preguntarnos, ¿cuál es la verosimilitud de esa situación? ¿Quién necesita ese dato? ¿Para qué?

Si, en cambio, se trata de determinar si en el patio o el terreno de la escuela es posible delimitar una cancha para realizar un deporte, cabría la necesidad de realizar algunas mediciones para analizar si se pueden respetar las medidas que figuran en los reglamentos.

En este caso, una vez que los alumnos se encuentren frente al problema de medir, es posible que recurran espontáneamente al uso de una cinta métrica, que tal vez conozcan por el uso social. Si esto es así, convendría realizar las mediciones avanzando sobre las dificultades que se produzcan con el uso del instrumento y luego se podría discutir cómo se hubiera podido resolver el problema si no hubieran tenido ese instrumento, aportando incluso alguna información histórica acerca de unidades, como el codo, el pie, la legua, la vara, etcétera.

Otra posibilidad es que no se cuente con los instrumentos necesarios o se desconozca su uso, y entonces el conjunto de la clase, con nuestra ayuda, decidirá cómo resolver el problema.

Según las experiencias cotidianas de los niños, y de las prácticas habituales en sus comunidades, será importante recuperar los contextos[18] en los que se usan balanzas o recipientes para medir capacidades. Visitar una verdulería, una farmacia, un correo, un corralón de materiales o una veterinaria permitirá tomar contacto con su uso, si es que este no fuera conocido por los niños.

En ambientes urbanos, es frecuente que los chicos conozcan, por ejemplo, las balanzas digitales que se usan en las fiambrerías o en los supermercados, instrumento cuyo uso resulta difícil de relacionar con las comparaciones cualitativas que se pueden hacer sopesando elementos. Además, esas balanzas, a diferencia de las de dos platillos que comparan masas, funcionan como dinamómetros, comparando un peso con una escala graduada. Cualquiera sea el caso, es importante recuperar los conocimientos disponibles de los niños para determinar cómo avanzar en la comprensión del proceso de medir.

A continuación, presentamos una secuencia de actividades para el tratamiento del peso. Para desarrollarla, se requiere contar con una balanza de platillos, pesas y una balanza de cocina. Las pesas se pueden reemplazar por paquetes de alimentos u otros productos en los que figure el peso y, eventualmente, se podrían fabricar la balanza de platillos y las pesas dentro un proyecto más amplio.

El envío de paquetes por correo, por ejemplo, ofrece un contexto en el que tiene sentido estimar el peso de lo que se quiere enviar para anticipar entre qué valores podría encontrarse lo que hay que pagar cuando se conoce la tarifa. Contar con esta información permitiría agregar otros problemas a esta secuencia, dando sentido a la necesidad de estimar y de medir.

Secuencia para estimar y pesar objetos: “Sopesando y pesando”

Para realizar las actividades de esta secuencia se necesitan objetos de peso, forma y volumen diferentes y una balanza de platillos. Si se utiliza el ejemplo del envío postal, podríamos usar, por ejemplo, distintas cajas que, con dimensiones más o menos similares, contengan objetos de distintos materiales. En otro caso, se podrían usar paquetes de alimentos, bolsas con distintas cantidades de frutas, tornillos, etcétera.

[18] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Los contextos”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno.*

Actividad 1

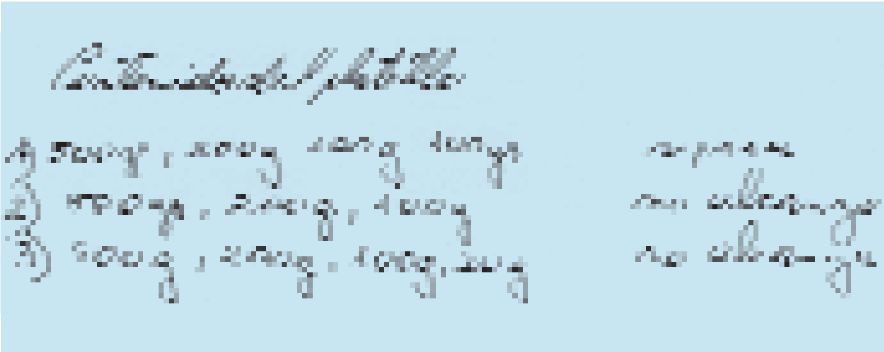
Propondremos a los niños que realicen una primera estimación acerca del peso de los paquetes y que registren sus anticipaciones acerca de, por ejemplo, cuál será el más caro para enviar por correo, sabiendo que en la tarifa se considera el peso y dimensiones del paquete. Para continuar, los alumnos harán una segunda estimación sopesando los objetos con sus manos y luego, entre todos, determinarán cuál es el más pesado, usando una balanza de platillos. Es posible ordenar los datos en una tabla para luego analizar las diferencias entre los valores obtenidos, discutir sobre las posibles causas de los diferentes resultados y registrar las conclusiones a las que se arribe.

Actividad 2

Se necesita una balanza de platillos, pesas de 500 g, 200 g, 100 g, 100 g, 50 g, 20 g, 20 g, 10 g con etiquetas que indican de manera legible su valor y distintos paquetes de distintos pesos. También es posible incluir pesas con denominaciones fraccionarias para evaluar, por ejemplo, la equivalencia 1/2 kg = 500 g.
En primer lugar, escribiremos en el pizarrón los valores de las pesas, luego pondremos en uno de los platillos la pesa de 500 g, al tiempo que preguntaremos si es posible equilibrar la balanza usando las pesas disponibles. Esto se repite con otras pesas, como la de 200 g, de 50 g, etcétera.
A continuación, propondremos pesar distintos paquetes. Para complejizar la situación, promoviendo el intercambio de pesas por otras equivalentes, es conveniente proponer que indiquen el peso de otro objeto más el peso de un paquete. El peso de este objeto tendrá que ser superior a 1kg y juntos deben pesar menos de 2 kg. Es importante aclarar que las únicas pesas disponibles son las que están etiquetadas.

En esta actividad, los chicos comenzarán pesando objetos con una balanza de platillos, tratando de evitar operaciones inútiles y extrayendo información de las situaciones de equilibrio y desequilibrio en la balanza para terminar reconociendo la relación 1kg = 1000 g.

El siguiente ejemplo ilustra el trabajo de un alumno que escribía en el pizarrón el contenido del platillo y sus correspondientes constataciones.



El resto de los alumnos iba realizando las siguientes anticipaciones: el paquete pesa menos de 900 g, el paquete pesa más de 800 g y menos que 900 g, el paquete pesa más de 820 g y menos que 900 g.

Para trabajar la estrategia de “pesada” con la balanza de platillos y desalentar la búsqueda del resultado por tanteo, luego de algunos ensayos iniciales, podemos proponer a los alumnos que:

- piensen y registren cuál podría ser el próximo ensayo;
- discutan las sugerencias que hicieron y seleccionen una;
- el alumno encargado de pesar ensaye la propuesta seleccionada y el resto de la clase establezca un nuevo encuadramiento;
- reiteren este proceso hasta la obtención del equilibrio.

Al pesar conjuntamente los dos objetos, los chicos pueden tomar conciencia de que no les alcanzan las pesas para pesar los objetos dados. En caso de que ningún alumno piense en utilizar el primer paquete como un peso conocido, podemos hacer la sugerencia, explicitar el procedimiento y convocar a los alumnos a realizar la pesada. Es posible que se susciten algunas discusiones sobre la posición de los mismos, ya que hay alumnos que piensan que el resultado será distinto según se coloquen las pesas sobre el objeto o el objeto sobre las pesas.

La siguiente actividad permitirá a los chicos ampliar el repertorio de referentes y avanzar en el uso de escrituras de cantidades.

Actividad 3

Les mostraremos a los chicos objetos familiares y les propondremos que anticipen su peso. Luego, harán una segunda estimación sopesando los objetos y las pesas utilizadas en la actividad 2.

A fin de determinar cuáles son las mejores estimaciones, podemos proponer que utilicen una balanza de cocina para pesar los objetos y registrar dichos pesos.

El registro de toda esta información en una tabla facilita las comparaciones y para ello, según los saberes del grupo en relación con este tipo de registros, podremos entregar una tabla ya preparada al inicio de la actividad o dejar que este recurso sea elaborado por los niños.

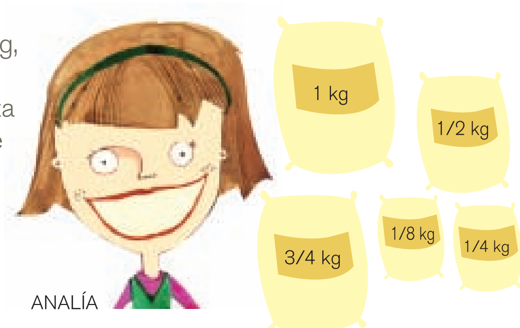
Este problema de estimación habilita para trabajar la referencia del peso de ciertos objetos familiares e introduce el uso de la balanza con cuadrante. Esto requerirá de nuestras intervenciones para garantizar que los niños se ubiquen frente al cuadrante y no de costado, y también para interpretar el valor de las marcas entre los grandes trazos numerados.

En esta secuencia hemos presentado actividades para tratar el peso que exigieron: comparar los pesos de dos objetos a través de los sentidos; elaborar estrategias de medición para pesar objetos con distintas balanzas y expresar el resultado con escrituras compuestas y fracciones del kilogramo; estimar el peso de determinados objetos y efectuar cálculos simples.

Es importante que tengamos en cuenta que no alcanza con realizar alguna de estas actividades en forma aislada. Al presentarlas en una secuencia se favorece el avance en las estimaciones a partir de la reflexión realizada en la actividad precedente. Por otro lado, trataremos de aumentar el número de referentes de peso disponibles con el fin de que los chicos los utilicen en la estimación del peso de nuevos elementos.

Además de las actividades que involucran mediciones efectivas, tendremos que incluir situaciones que vuelvan sobre lo realizado para reflexionar sobre algunas equivalencias entre cantidades y entre expresiones fraccionarias y decimales[19]. Por ejemplo:

- Analía tiene una pesa de 200 g, dos de 100 g, dos de 50 g. ¿Puede comprobar en su balanza si son correctas las etiquetas de estos paquetes? ¿Cómo?



[19] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Las representaciones", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno.*

Con respecto al trabajo con **capacidad,** en 3er año/grado, los alumnos seguramente ya han resuelto situaciones en las que tuvieron que comparar el contenido de distintos recipientes estableciendo relaciones del tipo: *Contiene más, menos, igual que.*

Si esto no se hubiera realizado antes, es conveniente que planteemos comparar una variedad de recipientes con características distintas en cuanto a su altura, su diámetro, la uniformidad de sus secciones, pero que al mismo tiempo tengan capacidades aproximadas que tornen difícil dar "a ojo" el orden correcto. Una primera comparación tal vez lleve a los niños a utilizar estas particularidades para argumentar el orden elegido, por ejemplo, *Este es el menor porque es el más bajo,* o bien *Este es el más grande porque es el más alto.* La manera de verificar la forma en que se pensó el orden es ir comparando pares de recipientes por trasvasamiento o bien pensar en un recipiente de capacidad mayor: *Llenar con arena cada recipiente, volcar ese contenido en el recipiente grande y hacer una marca. Recién después ordenar por las marcas.*

Avanzar en el tratamiento de las unidades de capacidad nos permitirá ofrecer una variedad de problemas ligados a la operatoria de fracciones, en principio, a partir de fracciones usuales del litro.

La exploración de la diversidad de recipientes en los que se comercializan bebidas da un contexto posible para explicitar las primeras equivalencias. Podríamos presentar la situación de calcular la cantidad de vasos de distinto tamaño que se pueden llenar con el contenido de una botella.

Actividad 4

Si es posible, cada grupo de alumnos tendrá una botella de distinta capacidad (3/4, 1, 1 1/2 y 2 litros) y un conjunto de vasos o envases de distintos productos lácteos, por ejemplo de 1/2 litro, 1/4 litro y 1/8 litro para averiguar. *¿Cuántos vasos o envases de cada tipo se pueden servir con el contenido de la botella?*

En primer lugar, interesa que los chicos anticipen y discutan cómo van a hacer las comprobaciones, ya que no se trata de probar directamente la capacidad de cada vaso, sino de establecer relaciones entre los mismos que permitan responder a la pregunta con la mayor economía de trasvasamientos posibles.

Los chicos podrán utilizar distintas representaciones para registrar la capacidad de los vasos, ya que la pregunta derivará en determinar *¿Qué parte del litro es cada vaso? ¿Cuántos necesito de cada uno para completar un litro?*

En función de los conocimientos que tienen disponibles, algunos chicos usarán fracciones, otros podrán escribir *Con cuatro formo un litro.* De todos modos, cabe destacar aquí que estos resultados son aproximados porque, por una parte, el contenido inicial de la botella puede no ser el que señala la etiqueta y, por otra parte, aunque los trasvasamientos se realicen con cuidado toda medición supone un error. En consecuencia, habrá que distinguir entre afirmaciones, como *Si con cuatro formo un litro, cada vaso tiene más o menos 1/4 litro* de otras afirmaciones, como *4 x 1/4 litro = 1litro* o aun más *4 x 1/4 = 1.*

Para que los chicos pongan en funcionamiento las equivalencias entre medios, cuartos y octavos, podemos hacer preguntas como las siguientes: *¿Qué diferencia en litros guardan los recipientes entre sí? ¿Cuántos litros reúnen el recipiente 1 y el recipiente 2?* o bien *Necesito obtener tantos litros. ¿Con qué recipientes puedo hacerlo para desperdiciar la menor cantidad posible?, etcétera.*

Otra posibilidad para establecer equivalencias es proveer instrumentos graduados (jarras, biberones, recipientes graduados en 1/2 litro, 1/4 litro y 1/8 litro o en ml) distintos para cada grupo y discutir cuáles serían más útiles para resolver distintos problemas que requieran medir capacidades, como preparar una receta de cocina o una mezcla para un revestimiento de pared, colocar cloro en un tanque de agua, fertilizante en una regadera, etcétera.

En este caso, si bien se elimina la posibilidad de discutir sobre algunos aspectos ligados a la iteración de la unidad, –cuando se pregunta *cuántas veces entra la unidad en la cantidad a medir*– se plantean de entrada las equivalencias entre las capacidades de los recipientes en medios, cuartos y octavos de litro y en ml, dl o cc, porque justamente esa es la escala disponible en dichos objetos. Las equivalencias 1 l = 1000 ml = 10 dl = 1000 cc y las correspondientes fracciones de litro las registraremos en un afiche colectivo a fin de recurrir a ellas en otras oportunidades; también pueden ser registradas en las carpetas para consultarlas cuando lo necesiten.

Otra posibilidad es que los alumnos construyan recipientes graduados, lo que tiene ribetes muy interesantes. ¿Cómo conduciremos este proceso? En principio, analizaremos algunos recipientes graduados frecuentados por los alumnos en los términos descriptos en el párrafo anterior: las unidades que se usan y las equivalencias entre ellas.

En un segundo momento, los chicos deberían determinar las unidades que se utilizarán para graduar los recipientes, lo que también podría dar lugar a fabricarlas.

- Con estas cajas de leche de 1 l vamos a fabricar cajas de medio litro, de $\frac{1}{4}$ l y de $\frac{1}{8}$ l.[20] ¿Cómo podemos recortarlas?

[20] Esta propuesta ha sido adaptada de Saiz, I. (1987), *Fracciones. Un aprendizaje diferente.* NIM N° 2, Corrientes, mimeo.

Luego, es posible proponer a los chicos que gradúen algunos envases (de variadas formas y transparentes) provistos por nosotros con los recipientes de 1/2, 1/4 y1/8 litro, haciendo las marcas sobre una cinta de papel pegada en su exterior.

Si contamos con varios recipientes iguales, pero cuya forma no es cilíndrica, es interesante comparar los distintos procedimientos que los niños utilizan para graduarlos.

Algún alumno puede marcar 1/2 l y, para marcar 1/4 y 1/8, podría dividir en dos las distancias encontradas. Otro alumno podría tomar el envase de 1/8 l, llenarlo, volcarlo en el recipiente a graduar haciendo marcas sucesivas. Si se comparan ambos recipientes, se comprueba que las marcas no coinciden. Será el momento en que tendremos que instalar el debate alrededor de la falta de correspondencia entre dichos trazos y discutir sus causas. Cabe aclarar aquí que también es posible que los niños que utilizan el mismo procedimiento obtengan marcas ligeramente diferentes debido a la repetición de los trasvasamientos.

En *Cuadernos para el aula* del área de Tecnología se sugiere abordar las técnicas de construcción con materiales. La actividad propuesta incluye la fabricación de recipientes utilizando distintas técnicas de transformación de materiales. Estos serán de variadas formas y capacidades. Es posible proponer la estimación de la capacidad de cada recipiente y graduarlo, articulando así el trabajo de ambas áreas.

Podemos continuar investigando los modos de graduar recipientes a partir de tener que determinar una cierta cantidad de líquido o de arena. En este caso, es importante que la medida de dicha cantidad no pueda ser leída de forma directa con un recipiente graduado en 1/8 l, es decir, que no coincida con los múltiplos de 1/8.

El propósito de esta situación es iniciar a los alumnos en la discusión de la medición de una cierta cantidad no coincidente con algún trazo de la graduación, por lo tanto es conveniente analizar en este punto las desventajas que tiene un recipiente del tipo A con uno del tipo B y cómo es posible, en este último caso, resolver el problema planteado.

Sólo se requeriría disponer de algún recurso que permita dividir en partes iguales el espacio entre los trazos de la graduación y que una de esas divisiones coincida con el nivel alcanzado por el contenido. Este planteo es muy interesante según el tipo de números que tienen los trazos de la graduación. En la resolución de esta situación, se podrán presentar distintos conflictos, como por ejemplo: *Si la escala de mi vaso graduado está en cuartos litros y necesito dividirlo en tres partes iguales, ¿qué hago?,* o *¿Cómo puedo dividir en 8 si la escala de mi vaso toma como unidad 250 ml?*

A B

La puesta en común puede ser una buena oportunidad para retomar equivalencias entre fracciones de litros entre sí, entre algunas unidades del sistema decimal entre sí, entre algunas fracciones de litros y algunos submúltiplos... También para hacer cálculos y registrar sus resultados.

Otros planteos que podrían ser útiles para organizar una secuencia de trabajo[21]:

- Buscar recipientes graduados o envases de distintos productos que incluyan cantidades expresadas en dl, cl, ml para construir representaciones de los distintos órdenes de magnitud y establecer algunas equivalencias.
- Diseñar y construir envases, a partir de un cartón de jugo o de leche, incorporando el registro de su capacidad y usando la escritura decimal. Por ejemplo:

Construyan un recipiente de un décimo del litro (1/10 l = 1 dl = 0,1 l).

En estas situaciones, los chicos enriquecen sus prácticas respecto de la capacidad y tienen oportunidad de ordenar recipientes según lo que puedan contener (estimando y comprobando esas estimaciones por trasvasamiento);

[21] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Las situaciones de enseñanza”, en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno.*

elaborar estrategias de medición con distintos instrumentos (unidades no convencionales, jarras graduadas, unidades fracciones de litro) para ordenar recipientes por su capacidad; expresar el resultado de la medición con escrituras compuestas y fracciones de l; elaborar referentes cotidianos relativos al orden de magnitudes de algunas unidades de capacidad y efectuar cálculos simples.

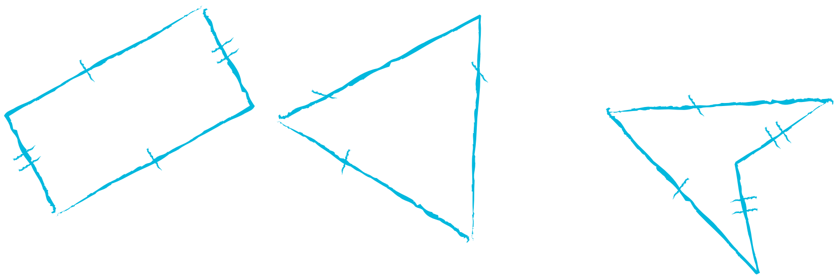
Con respecto a la **longitud,** los chicos a lo largo del Primer Ciclo ya han realizado mediciones efectivas. Seguramente, ya han determinado medidas aproximadas usando una "parte del cuerpo", metros, centímetros o milímetros en función del problema que deben resolver y de los instrumentos disponibles. También es probable que hayan estimado longitudes, como referencia a la altura o al largo de ciertos objetos conocidos, que ya funcionan como referentes.

En 4° año/grado presentaremos situaciones en las que, además de medir efectivamente con la regla graduada (en particular con el doble decímetro), los alumnos debatan sobre las imprecisiones obtenidas y sobre el control numérico que se puede obtener. Para hacerlo, es posible, por ejemplo, trabajar sobre problemas que requieran comparar perímetros de distintas formas geométricas.

Para que la actividad tenga sentido, es necesario enmarcarla en una secuencia más amplia que retome el trabajo realizado a propósito de las propiedades de las figuras, como la congruencia de los lados, discutiendo relaciones entre forma y perímetro. De este modo, además, estamos articulando el trabajo de Geometría con el de Medida.

Si bien la exploración de las variaciones entre perímetros y áreas se abordará en 5° año/grado, es inevitable considerar, aunque no lo evaluemos en términos de su medida, la existencia de la superficie. Por ejemplo, se podría preguntar a los alumnos:

- ¿Es posible afirmar que alguna de estas figuras tiene mayor perímetro que otra o no? ¿Por qué?



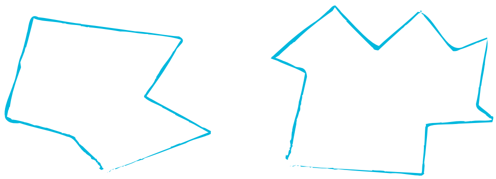
Aun conociendo la existencia de lados congruentes, algunos alumnos podrían afirmar que alguna tiene un perímetro mayor que otra, cuando en realidad se diferencian por su forma y área.

Algunas dificultades que muchos alumnos presentan para diferenciar perímetro y área pueden atribuirse, al menos en parte, a un tratamiento escolar poco articulado. Es frecuente que primero se calculen perímetros, en 4° año/grado, y después áreas, en 5° año/grado, pero no se presentan situaciones que permitan vincular estas medidas o discutir si un aumento en el perímetro deriva necesariamente en un aumento del área, situación que solo puede generalizarse para el caso de polígonos regulares.

Según las formas geométricas a las que se les deba hallar el perímetro, podremos presentar problemas de cálculo teniendo en cuenta las propiedades de los lados de dichas figuras. Por ejemplo, al calcular el perímetro de un cuadrado o rectángulo no será necesario medir cada uno de los lados, ya que con uno o dos respectivamente alcanza.

Para que la medición efectiva de perímetros suponga algún desafío, es necesario que presentemos, para su comparación, dos polígonos irregulares dibujados en hoja lisa de, por ejemplo, 8 y 10 lados, y cuyos perímetros estén entre 45 cm y 55 cm.

- ¿Cuál es la diferencia entre los perímetros de los siguientes polígonos?



En una puesta en común, posterior a las mediciones efectivas, se puede:

- registrar los resultados obtenidos en el pizarrón y discutir respecto de las formas de expresar las longitudes (en cm y mm, en mm, con escrituras con coma, etc.);
- debatir sobre las posibles razones de las diferencias entre las medidas: en el caso de que el largo del segmento no pueda leerse en un número entero de mm, *¿qué pasa si elijo siempre la raya de atrás?, ¿o siempre la de adelante?, ¿cómo hacer para equilibrar las faltas o los excesos?*
- analizar las distintas formas de determinar el perímetro considerando ventajas y obstáculos, por ejemplo: si hay segmentos que no han sido medidos, *¿cómo hacer para no olvidarse de ninguno?;* si se ubica de manera incorrecta la regla sobre el segmento que se mide, *¿desde dónde empezar a contar para leer correctamente?;* si hay errores de cálculo en la suma de longitudes, *¿por qué no pensar en utilizar la calculadora para controlar?*

Incluir el trabajo con calculadora en esta última actividad permite volver sobre el trabajo realizado con expresiones decimales, por ejemplo, al decidir *cómo entrar 7 cm y 8 mm en la máquina.*

Esta propuesta es un ejemplo de articulación de los contenidos de Medida con los del Eje “Número y Operaciones” y, en particular, del trabajo planteado para la escritura de decimales al resolver situaciones con la calculadora.

Es interesante analizar el valor máximo obtenido para cada perímetro, el valor mínimo, y determinar si alguno de ellos no resulta razonable en función de la precisión del instrumento del que se dispone. A partir de la consideración de estas cuestiones, lograremos encontrar un intervalo que incluya las respuestas razonables encontradas por los alumnos y no una “respuesta correcta”, encuadrando el resultado de la medición. Por ejemplo, el perímetro está entre 48,5 cm y 49 cm. Y por qué no pensar en una escritura del tipo 46,9 cm < perímetro de la figura 1 < 50,7 cm, donde los valores planteados son el máximo y mínimo razonables encontrados por los alumnos.

Si bien en esta etapa no se espera un tratamiento exhaustivo del error, es importante que los niños vayan advirtiendo que el resultado de una medición siempre se encuentra sujeto al instrumento que se utiliza y, por lo tanto, más que hallar “un valor” lo que se obtiene es un intervalo en el que afirmamos que se encuentra la medida buscada. La amplitud del intervalo y, por lo tanto, la confianza de la medición, dependerán del instrumento, en tanto que si se requiere mayor precisión, habrá que cambiar de instrumento o de estrategia.

En estas actividades, los niños tuvieron la oportunidad de medir con la regla graduada el contorno de ciertas figuras poligonales y, en ese contexto, calcular sumas de cantidades con descomposiciones, del tipo 12 cm 3 mm y/o cantidades escritas con coma decimal como 12,5 m y tratar la inexactitud de toda medición.

Plantear situaciones para calcular medidas con distintos procedimientos

Los cálculos de medidas pueden realizarse a partir de una medición efectiva o en contextos en los que los datos de medidas vienen dados o se pueden buscar en alguna fuente al alcance de los niños. El objetivo de estas actividades es que los chicos establezcan relaciones entre las distintas unidades sin necesidad de llegar a formalizar los procedimientos, por ejemplo *para pasar de m a cm se corre la coma dos lugares hacia la derecha,* sin que se adviertan las razones por las que este procedimiento “funciona”.

Tal como se afirmó al desarrollar el Eje “Número y Operaciones”, al seleccionar los problemas que involucren cálculos de medidas se buscará que impliquen escrituras fraccionarias y que exijan construir equivalencias, compararlas, sumarlas, multiplicarlas y dividirlas por un entero.

Algunos problemas en los que los chicos pueden calcular medidas con distintos procedimientos en situaciones reales de medición son, por ejemplo:

- Si se necesita calcular el peso de un objeto pequeño y no se dispone de pesas adecuadas, es posible pesar 10 objetos idénticos, o más, y a partir del resultado obtenido determinar el peso buscado.
- Después de determinar la capacidad de un recipiente, calcular el contenido de 5 recipientes idénticos.
- Colocamos una pesa de 1kg en uno de los platillos y un objeto de peso inferior en el otro. Un alumno es el encargado de establecer el equilibrio colocando pesas marcadas junto al objeto. El resto de los alumnos debe encontrar el peso del objeto a partir del inventario de las pesas utilizadas para lograr el equilibrio o pensar distintas combinaciones de pesas que podrían usarse.

La idea es utilizar las relaciones 1 kg = 1000 g , 1 l = 10 dl o 100 cl, 1 m = 100 cm = 1000 mm para expresar el resultado de cálculos asociados a una medición, tener la posibilidad de “controlar” el resultado por mediciones efectivas y registrar con escrituras diferentes (en g o en kg y g , en cl, ml o en l y ml, etcétera).

Es importante señalar aquí que la unidad en la que se expresa el resultado está determinada por la situación que se está resolviendo. Por ejemplo, después de calcular la distancia entre dos ciudades, sumando las cantidades en km que aparecen en un mapa no tiene sentido expresar esa cantidad en metros. En cambio, si para evitar la propagación de algunas enfermedades se quiere agregar lavandina en el tanque de agua de la escuela y se sabe que para un litro de agua se necesitan 2 o 3 gotas, para resolver el problema habrá que contar las gotas que entran en un vasito medidor, como los que se usan para los antibióticos, efectuar algunos cálculos y establecer equivalencias para expresar el resultado en una unidad adecuada.

En relación con los problemas que involucran el cálculo de medidas con distintos procedimientos sin recurrir a prácticas efectivas de medición, habrá que tener en cuenta tanto la presentación de situaciones en contexto de uso que sean verosímiles como otras que apunten explícitamente al análisis de las relaciones entre unidades. En ambos casos, se promoverán la anticipación y la evaluación de la razonabilidad de los resultados, estableciendo equivalencias entre cantidades solo si la situación lo requiere, sin forzar una práctica mecánica y poco significativa para los alumnos.

Para resolver estos problemas, los chicos tendrían que hacer cálculos como los siguientes:

- Realizá los siguientes cálculos:

500 g + 1 kg 300 g + 250 g = ...
250 g + $\frac{1}{2}$ kg + 1 kg 200 g = ...
la mitad de 3 l 600 ml = ...
1 l 350 ml - $\frac{1}{4}$ l = ...
1 kg 200 g + ... = 3 kg $\frac{1}{2}$

Al resolver estos cálculos, los chicos utilizarán las relaciones entre las distintas unidades y podrán componer y descomponer las cantidades utilizando procedimientos de cálculo mental.

Por ejemplo, en el caso c), algunos alumnos podrán repartir en dos cada uno de los términos (la mitad de 3 l es 1 l y 1/2 l o 1 l 500 ml y la mitad de 600 ml es 300 ml), para luego sumar los resultados (1 l + 500 ml + 300 ml). Otros alumnos podrán pensar que 3 l es lo mismo que 3000 ml y agregarle los 600 ml, para luego dividir 3600 en dos (1800 ml, lo que es lo mismo que 1 l y 800 ml). Asimismo, se podrán establecer equivalencias entre escrituras fraccionarias y decimales.[22]

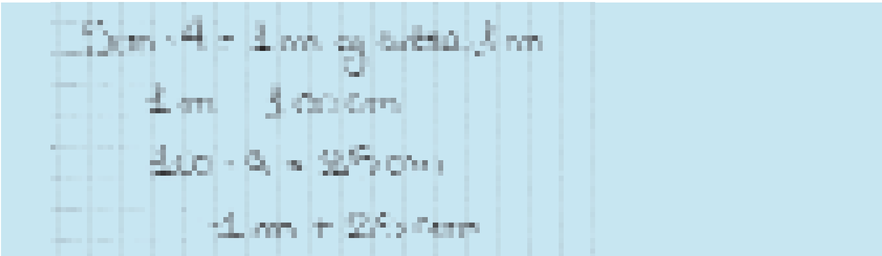
En 4° año/grado es fundamental articular el trabajo de medida con el de números racionales, pues es en este contexto que las fracciones adquieren sus primeros significados para los chicos, ya que el uso social más difundido de estas escrituras está asociado a medidas de tiempo, peso, capacidad y longitud.

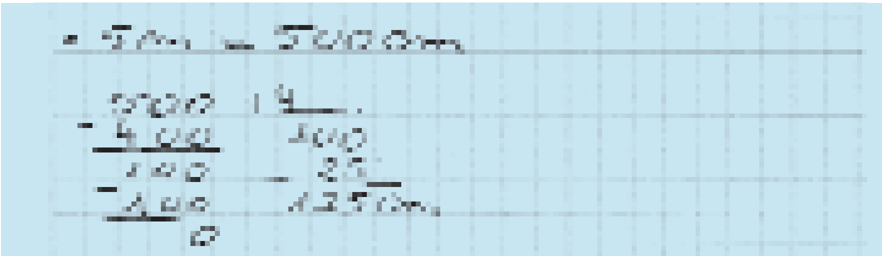
Para el trabajo con números decimales, son particularmente útiles las situaciones de reparto equitativo de cantidades. Si bien no se espera que los niños avancen hacia las cuentas de dividir en las que se obtiene cociente decimal, es posible comenzar a discutir el sentido de que quede o no resto y cómo puede repartirse ese resto para hallar el cociente exacto.

[22] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Plantear situaciones para operar con fracciones con distintos procedimientos (sumas, restas, dobles, etc.)", de este *Cuaderno*.

• Celina cose y teje para un negocio. Ayer entregó 4 mantas iguales que había hecho con 5 kg de lana que tenía. Si le piden una manta más, ¿cuánta lana necesita comprar?

Para resolver este problema, los niños podrán usar procedimientos como los siguientes:





En estos casos, además de discutir sobre los distintos procedimientos utilizados por los chicos, se podrá reflexionar sobre las equivalencias entre los diferentes resultados obtenidos.

En relación con la medida del **tiempo**, en *Cuadernos para el aula: Matemática 3*, se plantea la lectura de relojes de aguja y/o digitales para responder a las preguntas *¿Qué hora es? ¿A qué hora entran los alumnos del turno de la tarde? Si el colectivo debía pasar a las 13 hs 25 min y tiene 15 min de atraso, ¿a qué hora pasa?* La intención de estas preguntas es expresar las medidas de tiempo en el sistema sexagesimal (13 h 25 min en el digital aparece 13:25) y discutir sobre las diferencias que plantean dichos relojes (la sola posición de las agujas no informa si es antes del mediodía o después).

En 4° año/grado el tratamiento de las duraciones debe permitir tratar y hacer evolucionar los conocimientos que los alumnos tienen de las expresiones fraccionarias[23]. La idea aquí es poner en evidencia la designación de ciertas partes de la hora por una fracción y su equivalencia con cierta posición de las agujas en el reloj además de su expresión en horas y minutos. Para ello, se pueden presentar situaciones tales como:

• Diego sale de su casa a las 7:10 para ir a la escuela y viaja durante un cuarto de hora. ¿A qué hora llega a la escuela?

• Pedro necesita tres cuartos de hora para llegar a su lugar de trabajo. Si llega a las 8 hs, ¿a qué hora sale de su casa?

Las consignas precedentes pueden ser escritas con expresiones fraccionarias, como 1/2 h, 1/4 h y 3/4 h, y los chicos tendrán que encontrar y registrar sus equivalencias en minutos (1/2 h = 30 min; 1/4 h = 15 min) apoyados en que 1 h = 60 min, un cuarto de hora es la mitad de la mitad de una hora, tres cuartos de hora es 3 veces un cuarto de hora…

Se tiene, así, un contexto adecuado para analizar las distintas formas de componer la unidad en medios y cuartos: *dos veces 1/2 h hacen una hora; también 4 veces 1/4 de hora hacen una hora; 1/2 h y 1/4 h es lo mismo que 3/4 h; 1h menos 1/4 h es 3/4 h...* y la posibilidad de establecer vínculos con situaciones de medición anteriores (un litro y medio, un kilo y cuarto...).

Para resolver estas situaciones relativas a la medida del tiempo, los alumnos deben comprender el significado de las fracciones simples de la hora; conocer equivalencias entre las diferentes expresiones de la hora (escritura fraccionaria, hora y minuto, posición de las agujas sobre el reloj) y hacer cálculos simples.

Los nuevos problemas que se planteen deben hacer intervenir estas distintas formas de registro (fraccionaria, y en horas y minutos) tanto en términos de interpretación como de producción por parte de los alumnos.

[23] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Plantear situaciones para medir, repartir o partir usando fracciones”, de este *Cuaderno*.

Por último, cabe señalar que la tarea de realizar prácticas efectivas de medición no es fácil ni cómoda y, por lo general, nos enfrentamos con algunos problemas: instrumentos de medida que no se cuentan en cantidad suficiente para todos los alumnos, instrumentos defectuosos o con ligeras diferencias, problemas de precisión en la lectura o en el uso del instrumento, problemas de escritura de la medida resultante, etcétera.

Lo dicho anteriormente pone de relieve la importancia que tiene la preparación minuciosa y previa, por nuestra parte, de las actividades que deseamos realizar y de las condiciones que las mismas exigen para el logro de sus objetivos.

Otro punto a considerar es el de la distribución de estas situaciones en la planificación anual. La idea es que tanto las secuencias como las situaciones planteadas puedan ser organizadas en "núcleos de problemas de medidas" para ser tratados en distintos momentos del ciclo lectivo y durante todo el año escolar, articulando el trabajo con el desarrollo de los saberes incluidos en el Eje "Número y Operaciones". Esta organización garantizaría para los alumnos prácticas recurrentes en tiempos no sucesivos y sin asignar a estos contenidos una unidad (en general la última) del plan anual.

Para trabajar con la información

Tal como hemos planteado, el trabajo sobre el tratamiento de la información es transversal a los dos ejes de contenidos. En el caso de los problemas espaciales, geométricos y de medida, este trabajo también concierne a la consideración de aspectos que pueden ser retomados en algunas de las actividades planteadas.

Es el caso de la actividad 2 de la página 141 donde hay información en un dibujo y en un texto. Aquí, la información del dibujo permite determinar que la tapa es de 6 cm por 4,5 cm. Si no se diera el dibujo, habría 3 "tapas" posibles para la caja. Otro caso es el de la consideración del número de triángulos total de cuadriláteros que se pueden armar en la actividad 2 de la página 147. Se podría discutir con los alumnos la forma de realizar una búsqueda exhaustiva de todas las combinaciones posibles usando los cuatro triángulos.

Si bien aquí hemos mostrado sólo dos ejemplos, combinar los modos de presentar la información y analizar cuando sea pertinente el número de soluciones son aspectos que permitirán al docente enriquecer el trabajo con los problemas.

En diálogo
siempre abierto

Las propuestas y la realidad del aula

Para ampliar el repertorio y recrear las actividades

Al desarrollar el enfoque para trabajar en la clase de Matemática, hemos insistido en las elecciones que debemos realizar respecto de los tipos de problemas, sus modos de presentación y su secuenciación. También hemos señalado que la gestión de la clase será determinante respecto del sentido que los alumnos construyen sobre las nociones matemáticas, tanto por las interacciones que el docente promueva entre los alumnos y con las situaciones como por sus propias intervenciones a lo largo del proceso de enseñanza.

Por otra parte, hemos planteado que es necesario incorporar, más allá de la resolución de problemas, otras actividades, pues este no debiera ser el único tipo de práctica matemática que funcione en el aula, ya que es fundamental que las clases incluyan instancias de reflexión sobre lo que se ha realizado. En estas instancias, podrán plantearse, por ejemplo, actividades de comparación de problemas realizados con alguna operación, o de comparación de diferentes estrategias para resolver un cálculo, algunas acertadas y otras no. También se podrá poner en consideración de los alumnos la recuperación de las propiedades de cada una de las figuras que han estudiado, a modo de síntesis.

Para comparar problemas, es posible revisar lo trabajado en el cuaderno durante una semana y señalar todos los problemas que se resolvieron con una determinada operación para comparar los enunciados, encontrar semejanzas y diferencias[1] y pensar nuevos enunciados que podrían resolverse con la misma operación.

En el caso de querer comparar estrategias de cálculo, se puede recuperar, por ejemplo, el repertorio de sumas de fracciones que ya hayan memorizado todos los alumnos y registrarlo a modo de síntesis en un afiche que se cuelgue en el aula para luego utilizar esos resultados como ayuda para resolver otros cálculos.

[1] Un ejemplo de este tipo de actividad se presenta en *Cuadernos para el aula: Matemática 5*, en el apartado “Plantear situaciones para operar con cantidades expresadas en fracciones o decimales con distintos significados”, en el que se presenta un fragmento de registro de clase.

Entre ellos, se podrá señalar cuáles son los que ya conocen de memoria y cada chico podría ir armando una tarjeta con todos los cálculos que él sabe o las propiedades que conoce y, de este modo, tomar conciencia de su progreso.

Asimismo, en este apartado queremos avanzar sobre actividades que forman parte de la tradición escolar: las tareas para el hogar, y precisar algunas cuestiones relacionadas con el Segundo Ciclo. Estas tareas, pensadas para que el alumno las desarrolle fuera de la escuela, renuevan su sentido en relación con los aprendizajes prioritarios y con el tiempo necesario de apropiación individual de los conocimientos trabajados en clase.

La realidad compleja con la que hoy interactúa la escuela presenta aspectos que pueden hacer difícil llevar adelante el estudio. Sin embargo, aun en este escenario, es posible plantear alguna actividad desafiante para resolver fuera del aula. En este sentido, es imprescindible asegurarnos de que todos hayan comprendido cuál es el desafío que se propone, para evitar la creación de un obstáculo excesivo para los niños, o para los adultos que los acompañan cuando realizan sus tareas, que podrían intervenir en una dirección distinta a la que pretendemos.

Deberemos ser muy claros para distinguir si la tarea debe hacerse con o sin ayuda y, en este último caso, precisar cuál es la ayuda que se espera. En el caso de los alumnos del Segundo Ciclo, a diferencia de los de Primer Ciclo, es posible pensar en una mayor independencia de los adultos en la realización de estas tareas. Esto requiere que los mayores comprendan la importancia de este planteo y, al mismo tiempo, exige que las características de las actividades sean lo suficientemente similares y, a su vez, diferentes respecto de las discutidas en clase, de tal manera que todos los alumnos comprendan lo que se espera de ellos como producción; que tengan aseguradas un lugar de importancia en el proyecto de aprendizaje del docente y que se garanticen con ellas verdaderas situaciones de aprendizaje para los alumnos.

Las actividades que se pueden plantear para realizar fuera de la clase también podrán ser de distinto tipo. Por ejemplo, se podría seleccionar un conjunto de cuentas ya resueltas y pedir la comparación de los números que intervienen en los cálculos y los resultados para analizar semejanzas y diferencias y advertir regularidades. O también, proponer partidas simuladas sobre un juego que se realizó en clase en donde intervengan los números y cálculos con los que se estuvo trabajando y que den lugar a la práctica del cálculo mental.

En cualquier caso, recuperar lo producido fuera de la escuela supone mucho más que “corregir” la tarea: se trata, en cambio, de organizar una nueva actividad diseñada de modo que tome como punto de partida lo realizado fuera de clase. Así, también es una excelente oportunidad para una interacción más personalizada con los alumnos y sus dificultades. Nos estamos refiriendo a plantear una tarea focalizada en aquellos aspectos que necesite profundizar cada niño o cada grupo. Todo esto permite que el alumno perciba que se valora su producción individual, al mismo tiempo que él mismo valore el tiempo que dedica para su estudio individual como una instancia más de su proceso de aprendizaje.

Para construir un espacio de debate sobre la enseñanza

Todas las actividades propuestas en este *Cuaderno* están sostenidas y fundamentadas en una concepción del aprendizaje que implica una idea de lo que pensamos que debiera significar "hacer matemática" para los alumnos. Sin embargo, para transmitir y sistematizar esta idea del quehacer matemático a los niños y niñas no es suficiente proponerles actividades "interesantes" que propicien en los alumnos aprendizajes diferentes y que los desafíen a buscar estrategias propias de resolución. Esperamos también que los alumnos desarrollen recursos de control sobre sus procedimientos y los ajenos, puedan explicar sus estrategias y argumentar en favor de ellas, descentrarse de sus producciones e introducirse en las de sus compañeros, siendo capaces de apoyarlas o criticarlas con fundamentos matemáticos.

Hay momentos de la clase que son especialmente propicios para lograr este tipo de aprendizaje. Por eso afirmamos que además de la buena selección de actividades es fundamental tener en cuenta la organización y gestión de la clase que el docente es capaz de llevar a cabo para alcanzar estos objetivos. Los espacios de debate, como la confrontación de procedimientos, ponen a los alumnos en la situación de tener que dar cuenta de las estrategias utilizadas y de entender estrategias ajenas. Cuando los niños tienen que explicar a sus compañeros algo que no entienden, o hacerles entender por qué dicen que "está mal" o "está bien" tal o cual cosa, es cuando se les genera la necesidad de pensar la forma más clara de comunicar sus argumentos. Este es un plus frente a la actividad de resolver un problema, porque implica un trabajo de comprensión y dominio de la situación mucho mayor que solo resolverlo. El hecho de justificar "qué se hizo", "cómo se hizo" "por qué se hizo" "si está mal o bien" implica de hecho una reflexión sobre la tarea realizada y una nueva mirada sobre el problema, pero desde la posición de alguien que ya lo ha "desmenuzado", porque ya lo ha resuelto. Es decir, lo que les pedimos a los alumnos en estos momentos de debate involucra un aprendizaje diferente (y más complejo) del que implica la resolución de la actividad planteada. De aquí el hecho, que la falta de gestión de estos espacios de debate limite los aprendizajes matemáticos en los alumnos. Desde la perspectiva de esta concepción del aprendizaje, no es lo mismo realizar una confrontación que no hacerlo, pues estos espacios son el corazón mismo de la diferencia en los aprendizajes que esperamos propiciar en los alumnos desde esta propuesta.

La organización y gestión de estos espacios de debate entre los alumnos implica también un aprendizaje por nuestra parte, ya que debemos aprender cómo intervenir, de manera de propiciar este tipo de aprendizajes en los alumnos. Cuando los alumnos comienzan a producir solos y aparecen diferentes procedimientos, de diferentes niveles de complejidad, con diferentes tipos de errores, se presenta la dificultad para nosotros, por un lado, para decidir qué discutir y, por el otro, para saber cómo hacer para que los alumnos hablen y se pongan a discutir acerca de sus producciones. Decidir cuáles podrían ser buenas preguntas y cuáles desorientan más aun al alumno en este nuevo tipo de trabajo en el que estamos embarcándolo es un desafío permanente. Es muy útil y conveniente en un primer momento no realizar preguntas abiertas como *A ver, Juan, ¿qué te parece este procedimiento?*, ya que la amplitud de la pregunta hace que un alumno que se está iniciando en este tipo de trabajo no pueda imaginarse cuál podría ser una respuesta razonable en este caso. En cambio, preguntas como *A ver, Juan, fijate en lo que hizo Martín en esta cuenta, ¿qué son estos números?, ¿manzanas?, ¿cajones?, ¿qué tiene que ver esta cuenta con el enunciado del problema? ¿Para qué creés que la hizo?*, son más concretas y más fáciles para imaginarse una posible respuesta.

También es conveniente que estemos atentos especialmente a que estos debates no se transformen en una corrección de los procedimientos utilizados, en los que nuestra intervención esté asociada al control de lo realizado. Si es el docente el que finalmente tiene la palabra y queda depositado solo en él dar o no por válido lo que se hizo, los alumnos no sienten la necesidad de emitir su opinión más que para rendir examen frente al maestro y frecuentemente no se muestran interesados en responder a las preguntas que este formula en ese momento de trabajo colectivo. En ese caso, la Matemática sería vivida como una serie de reglas y definiciones predeterminadas que hay que reconocer y aplicar.

Si, en cambio, nuestra intervención en el debate intenta recuperar lo que los alumnos están haciendo y promovemos la discusión alrededor de esas producciones, habrá un verdadero espacio de intercambio, una situación genuina de comunicación en la que intercambiarán distintos puntos de vista, para llegar a una conclusión aceptada por el conjunto de la clase. En este caso, el trabajo se valida por la comunidad clase, y el maestro interviene conduciendo el debate entre los chicos o introduciendo preguntas nuevas y sistematizando las conclusiones a las que se arribe. En principio, estas conclusiones podrán ser registradas tal como las formulen los alumnos aunque su expresión no se ajuste completamente a las expectativas del docente. En una etapa posterior se podrán revisar estas enunciaciones y, por ejemplo, compararlas con lo que se dice al respecto en un libro de texto, para avanzar en el uso del vocabulario específico y/o discutir cuestiones ligadas al uso de distintas anotaciones. Asimismo se podrá volver sobre estos enunciados para analizar su “campo de validez” y modificarlos, si fuera necesario, para avanzar en el nivel de generalidad de lo que se afirma ya que algunas afirmaciones son verdaderas en un campo numérico, o para un conjunto de figuras, y no lo son para otro.

Si esta práctica forma parte de lo que queremos enseñar, es imprescindible tener en cuenta que necesita construirse a lo largo de toda la escolaridad, teniendo en cuenta las características propias de los niños en cada etapa.

Las propuestas incluidas en este *Cuaderno* forman, sin duda, una pequeña colección de casos con algunas sugerencias para su implementación y gestión. Su uso en el aula dependerá de las decisiones que, al respecto, se tomen en cada institución, atendiendo tanto a los proyectos institucionales como a las particularidades de cada grupo de alumnos y de la comunidad.

En muchas ocasiones, la lectura y discusión de estos casos derivará, seguramente, no en la “aplicación” de los ejemplos analizados, sino en nuevas propuestas adaptadas tanto a los conocimientos del grupo de alumnos como a la forma de trabajo del docente que las desarrolle.

En este sentido, resultará muy interesante el debate que se genere en el equipo de la escuela a propósito de su uso, los intercambios de lo ocurrido en las puestas en aula con los colegas y la sistematización de las nuevas propuestas que se puedan formular.

Del mismo modo, la consulta de los materiales recomendados en la sección “Bibliografía” de este *Cuaderno* permitirá ampliar la perspectiva presentada, multiplicar la variedad de propuestas y abrir nuevas preguntas sobre la enseñanza de la Matemática.

Bibliografía

Bibliografía recomendada para docentes

BROITMAN, C. e ITZCOVICH, H., “Geometría en los primeros años de la EGB: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza”, en: PANIZZA, M. (2003), *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* Buenos Aires, Paidós.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D. y SCHLIEMANN, A. (1991), *En la vida diez, en la escuela cero,* México, Siglo XXI.

CHEMELLO, G. (COORD.), HANFLING, M. y MACHIUNAS, V. (2001), *El juego como recurso para aprender. Juegos en Matemática EGB 2* (Material para docentes y recortable para alumnos), Buenos Aires, Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (también en Internet).

FERREIRO, E. (1986), “El cálculo escolar y el cálculo con dinero en situación inflacionaria”, en *Proceso de alfabetización. La alfabetización en proceso,* Buenos Aires, Centro Editor de América Latina.

FUENLABRADA, I., BLOCK, D., BALBUENA H., CARVAJAL, A. (2000), *Juega y aprende Matemática. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

PANIZZA, M. (1997), “Aproximación al análisis del error desde una concepción constructivista del aprendizaje”, en: BRESSAN, A. y OTROS (1997), *Los CBC y la Matemática,* Buenos Aires, AZ.

PANIZZA, M. (2003), “Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la Matemática”, en *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* Buenos Aires, Paidós.

PONCE, H. (2000), *Enseñar y aprender Matemática. Propuestas para el Segundo Ciclo,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

PUJADAS, M. y EGUILUZ, M. L. (2000), *Fracciones, ¿un quebradero de cabeza? Sugerencias para el aula,* Buenos Aires, Novedades Educativas.

QUARANTA, M; WOLMAN, S. (2003), "Discusiones en la clase de Matemática: qué, para qué y cómo se discute", en: PANIZZA, M. (COMP.) (2003), *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* Buenos Aires, Paidós.

SADOVSKY, P. (COORD.), BROITMAN, C.; ITZCOVICH, H., QUARANTA, M. E. (2001), "Acerca de los números decimales. Una secuencia posible", en el documento *Aportes para el Desarrollo Curricular Matemática,* GCBA (también disponible en Internet).

SAIZ, I. "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir" en: PARRA, C. Y SAIZ, I. (comps.) (1994), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós.

Documentos curriculares para Nivel Primario – EGB 2, en Internet

La enseñanza de la división en los tres ciclos.
La enseñanza de la geometría en la EGB.
La enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos.
En: http://abc.gov.ar/LaInstitucion/SistemaEducativo/EGB/default.cfm

Matemática. Documento de trabajo N° 4. Actualización curricular, 1997.
Matemática. Documento de trabajo N° 5. Actualización curricular, 1998.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/educacion/docentes/planeamiento/primaria.php

Enseñar Geometría en el 1° y 2° Ciclo. Diálogos de la capacitación.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/cepa/geometria.pdf

Acerca de los números decimales. Una secuencia posible.
En: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/primaria.php

Desarrollo curricular N° 1.
La división por dos cifras: un mito escolar Desarrollo curricular N° 5.
La estimación, una forma importante de pensar en Matemática.
La medida, un cambio de enfoque. Desarrollo curricular N° 4.
Las regularidades: fuente de aprendizaje matemático. Desarrollo curricular N° 3.
Una forma de uso de la proporcionalidad: las escalas. Desarrollo curricular N° 2.
En: http://www2.educacion.rionegro.gov.ar/v2005/gcurri/matematica/matemat.htm

Propuestas para el aula. Material para docentes. Matemática EGB 2.
Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender (material para alumnos). Subsecretaría de Educación Básica, Ministerio de Educación.
Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender (material para docentes). Subsecretaría de Educación Básica, Ministerio de Educación.
En http://www.me.gov.ar/curriform/matematica.html

Bibliografía general de consulta

ARTIGUE, M., DOUADY, R. y OTROS (1995), *Ingeniería didáctica en educación matemática,* Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericano.

BRESSAN, A. (COORD.) (1995), *Contenidos básicos comunes para la EGB - Matemática,* Buenos Aires, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación Argentina.

BROUSSEAU, G. (1987), *Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemática,* Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.

CHARA, S. y ZILBERMAN, G. (2004), *Los libros de 4° Matemática,* Buenos Aires, Longseller.

CHEVALLARD, I. (1997), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado,* Buenos Aires, Aique.

CHEVALLARD, I., GASCÓN, J. y BOSCH, M. (1997), *Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje,* Barcelona, Ice-Horsori.

COLOMB, J. y PERROT, G. (1984), *Math HEBDO CM1,* París, Classiques Hachette.

I.R.E.M. (1985), *La division à l'école élémentaire,* Bordeaux, Universidad de Bordeaux.

MURPHY, P., LAMBERTSON, L. y TESLER, P. (2004), *The Math Explorer: Games and Activities for Middle School Youth Groups and Exploratorium Grades 7–12,* Emeryville, California, Key Curriculum Press.

PANIZZA, M. (COMP.) (2003), *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* Buenos Aires, Paidós.

PARRA, C. Y SAIZ, I. (COMPS.) (1994), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós.

SAIZ, I. (1987), *Fracciones. Un aprendizaje diferente, NIM N° 2,* Corrientes, mimeo.

SAIZ, I. Y COLABORADORES (1983), "Descubriendo las fracciones", en *Temas de Educación Primaria, DIE N° 1,* México, mimeo.

VERGNAUD, G. (1991), *El niño, la matemática y la realidad,* México, Trilla.

——————— (COMP.) (1997), *Aprendizajes y didácticas: qué hay de nuevo,* Buenos Aires, Edicial.

Se terminó de imprimir
en el mes de enero de 2007 en
Gráfica Pinter S.A.,
México 1352
Ciudad Autónoma de Buenos Aires